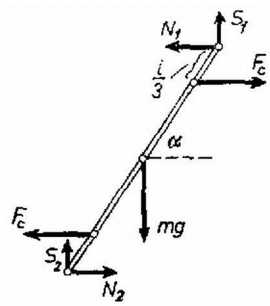
Válasszunk forgó koordináta-rendszert, melyben a rúd nyugszik és rajzoljuk fel a rúdra ható erőket, figyelembe véve, hogy az 1014. feladat megoldása szerint a rúd egyes pontjaira ható centrifugális erők hatása két, a rúd végeitől $l/3$ távolságban támadó $F_c = (m/2) \cdot (R/2)(2\pi n)^2$ nagyságú erővel helyettesíthető (1. ábra).



1. ábra

Az egyensúly feltétele az erőkre:

(1) $$N_1 - N_2 = 0,$$

(2) $$S_1 + S_2 - mg = 0,$$

és a forgatónyomatékra:

(3) $$(N_1 + N_2)l \cdot \sin\alpha - 2F_c \cdot (2/3)l \cdot \sin\alpha + (S_1 - S_2)l \cdot \cos\alpha = 0,$$

ahol α a rúd vízszintessel bezárt szöge.

Tudjuk, hogy a súrlódási erő abszolút értéke nem lehet nagyobb a nyomóerő és a súrlódási tényező szorzatánál:

(4) $$-\mu N_1 \le S_1 \le \mu N_1,$$

(5) $$-\mu N_2 \le S_2 \le \mu N_2,$$

Kérdés, hogy milyen μ érték mellett teljesülnek az egyenletek és a feltételek.

Az (1) egyenlet felhasználásával és az $N_1 = N_2 = N$ jelöléssel a (2) és (3) egyenletekből a következő képleteket kapjuk :

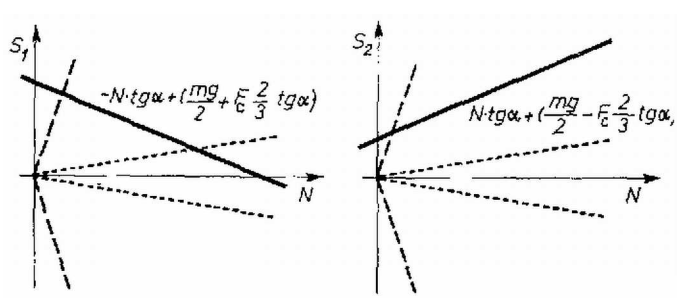
(6) $$S_1 = -N \cdot \operatorname{tg}\alpha + (mg/2 + F_c \cdot (2/3)\operatorname{tg}\alpha),$$

(7) $$S_2 = N \cdot \operatorname{tg}\alpha + (mg/2 - F_c \cdot (2/3)\operatorname{tg}\alpha).$$

Ábrázoljuk S_1-et és S_2-t mint N függvényét, és grafikonon tüntessük fel az $S_1 = \pm\mu N,\ S_2 = \pm\mu N$ egyeneseket is!
Ha

(8) $$(mg/2) > F_c \cdot (2/3)\operatorname{tg}\alpha,$$

akkor a 2. ábrán látható görbéket kapjuk.



2. ábra

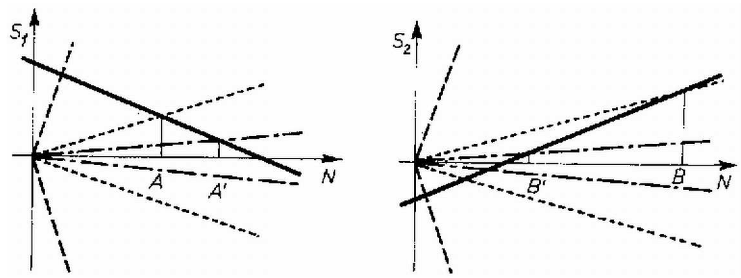
A pontozott vonal felel meg annak az esetnek, amikor $\mu < \operatorname{tg}\alpha$ szaggatott vonalat $\mu > \operatorname{tg}\alpha$ esetén kapjuk. A (4), (5) feltétel teljesül, ha a (6), (7) függvények görbéje a feltételeket ábrázoló szögtartományon belül halad.

Látható, hogy az első esetben N lehetséges pozitív értékei között nincs olyan, amelynél az (5) feltétel teljesülne. (S_2 görbéje sohasem kerül a szögtartományon belülre.) Ha viszont $\mu > \operatorname{tg}\alpha$, akkor lehetséges egyensúlyi helyzet, mert elég nagy nyomóerőkre mindkét függvény képe a szögtartomány belsejében van.

Érdekesebb a helyzet, ha

(9) $$mg/2 < F_c(2/3)\operatorname{tg}\alpha,$$

mert ekkor S_2 az $N = 0$-nál negatív érték (3. ábra).



3. ábra

Itt a következő lehetőségek vannak.

Ha $\mu \geq \operatorname{tg}\alpha$, akkor biztos van olyan N, melynél a (4), (5) feltételek együtt teljesülnek (szaggatott vonal).

Ha $\mu < \operatorname{tg}\alpha$, akkor bizonyos esetekben még mindig lehetséges egyensúlyi helyzet (pontozott vonal), de nincsen mindig egyensúly. Az S_1 függvényből az $N > A$, az S_2 függvényből az $N < B$ feltételt kapjuk, és ha $B > A$, akkor van olyan N, amely mindkét kikötést teljesíti. Pl. nagyon kicsi μ értékeknél nem ez a helyzet ($B' < A'$, pont-vonallal ábrázolva), és nem lehetséges egyensúly. Határesetben $A = B$ és figyelembe véve, hogy a metszéspontok koordinátája

$$A = \frac{mg/2 + F_c \cdot (2/3)\operatorname{tg}\alpha}{\mu + \operatorname{tg}\alpha}, \tag{10}$$

$$B = \frac{mg/2 - F_c \cdot (2/3)\operatorname{tg}\alpha}{\mu - \operatorname{tg}\alpha}, \tag{11}$$

kapjuk, hogy

$$\mu = (mg/F_c) \cdot (3/4). \tag{12}$$

Végeredményben a

$$\mu \geq \operatorname{tg}\alpha, \tag{13}$$

$$\mu \geq (mg/F_c) \cdot (3/4) \tag{14}$$

feltételek egyikének teljesítésekor lehet a rúd nyugalomban. Mivel azonban a fenti számítás (9) alapján csak $\operatorname{tg}\alpha \geq (mg/F_c) \cdot (3/4)$ esetén érvényes, nyilvánvaló, hogy (13) teljesülésekor (14) is igaz, és a két feltétel valójában egy. Figyelembe véve a centripetális erő értékét :

$$\mu \geq (3/4)g/(\pi^2 n^2 R). \tag{15}$$

Vizsgáljuk meg az eredmény fizikai jelentését!

$\mu > \operatorname{tg}\alpha$ azt jelenti, hogy a rúd a forgási sebességtől függetlenül beleszorul a hengerbe. Lehetséges, hogy a geometriai viszonyok ezt nem engedik meg, azonban ha a szögsebesség elég nagy, és teljesül a (9) feltétel:

$$F_c > (3/4)mg \cdot \operatorname{ctg}\alpha, \qquad \text{azaz} \qquad n > \sqrt{(3/4)(g/R) \cdot \operatorname{ctg}\alpha}, \tag{16}$$

akkor még így is lehetséges stabil helyzet a (15)-ben megszabott súrlódási tényező esetén.

Megkérdezhetjük, hogy adott súrlódási tényező mellett mekkora erő nyomja a henger falát, és mekkorák a súrlódási erők. Az esetek többségében erre a kérdésre nem tudunk pontos választ adni, aminek az a magyarázata, hogy a vizsgált szerkezet sztatikailag határozatlan, a három egyenletből álló (1), (2), (3) egyenletrendszer négyismeretlenes. (Sztatikailag határozatlan szerkezetek csak akkor számíthatók, ha a rugalmasságtan egyenleteit is figyelembe vesszük.) Módszereinkkel az erők egyértelmű meghatározása csak akkor lehetséges, ha teljesül a (9) feltétel és a (12) egyenlőség, vagyis ha az N nyomóerő maximális és minimális értéke egybeesik. (10)-ből vagy (11)-ből kapjuk, hogy $N = (2/3)F_c$, és (1), (2), (3) mellé ezt negyedik egyenletnek véve a megoldás:

$$S_1 = S_2 = mg/2, \qquad N = (2/3)F_c.$$

Megjegyzés. A megoldók többsége a számítás kiinduló pontjának – alaptalan szimmetria meggondolásokból – az $S_1 = S_2 = mg/2$ egyenletet tekintette. Láthatjuk, hogy ez csak egy nagyon speciális μ érték mellett teljesül, és bizonyos mértékig szerencse, hogy így is a helyes eredményt kapjuk.

A fenti hiba miatt senki sem vette észre, hogy $\mu > \operatorname{tg}\alpha$ esetén a rúd az álló hengerben is benne marad.