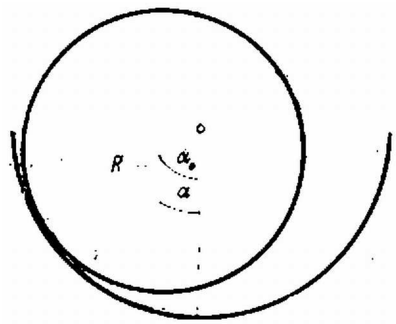
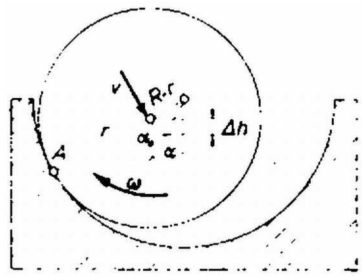


A henger, miközben súlypontja Δh-val mélyebbre, kerül, v sebességre és ω szögsebességre tesz szert. Csúszásmentes gördülésnél alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradásának törvényét:

$$(1/2)mv^2 + (1/2)\Theta\omega^2 - mg\Delta h. \tag{1}$$



1. ábra

Az 1. ábráról leolvasható, hogy

$$\Delta h = (R - r)(\cos\ \alpha - \cos\ \alpha_0), \tag{2}$$

ezenkívül tudjuk, hogy egy homogén tömegeloszlású henger tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére vonatkoztatva $\Theta = mr^2/2$.

Az (1) egyenletből csak akkor tudjuk meghatározni a sebességet, ha kiderítjük, hogy milyen megszorítást ad a csúszásmentes gördülés ténye v és ω között. Írjuk fel a henger A pontjának sebességét a vályúhoz képest! Ennek a pontnak a mozgása – ugyanúgy, mint henger bármely más pontjáé – két részből tehető össze. Egyrészt a súlypont haladó mozgásából adódóan v sebességgel mozog az érintő irányában lefelé, másrészt a forgás miatt $r\omega$ sebessége van az érintő irányában felfelé. Az eredő $r\omega - v$ sebesség viszont a csúszásmentes gördülés miatt nulla kell, hogy legyen:

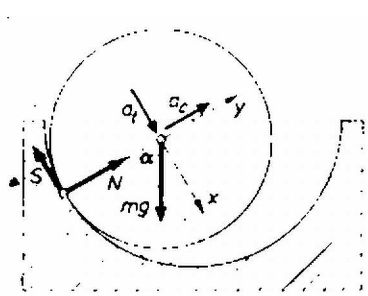
$$r\omega - v = 0. \tag{3}$$

Az (1)-(3) egyenletrendszer megoldása:

$$v = \sqrt{(4/3)g(R - r)(\cos\ \alpha - \cos\ \alpha_0)}, \tag{4}$$

$$\omega = \sqrt{(4/3)(g/r^2)(R - r)(\cos\ \alpha - \cos\ \alpha_0)}. \tag{5}$$

A pályára kifejtett erő helyett kényelmesebb annak ellenerejét, vagyis a hengerre kifejtett erőt meghatároznunk. A hengerre a súlya és a vályú által kifejtett erő hat. Az utóbbit célszerű sugár irányú nyomóerőre és érintőleges súrlódási erőre bontani (2. ábra).



2. ábra

Ezen erők hatására a henger β szöggyorsulással, súlypontja a_c centripetális és a_i érintőleges gyorsulással mozog. Írjuk fel a Newton egyenletet olyan koordináta-rendszerben, melynek x-tengelye érintőirányú, y-tengelye pedig sugárirányú!

$$N - mg\ \cos\ \alpha = ma_c, \qquad (6) \qquad mg\ \sin\ \alpha - S = ma_i. \qquad (7)$$

A forgómozgás alapegyenlete szerint

(8) $$Sr = \Theta\beta.$$

A csúszásmentes gördülés feltétele, (3) kis megváltozásokra is igaz:

$$\Delta v = r\Delta\omega.$$

A megváltozás Δt időtartamával osztva látható, hogy

(9) $$a_t = r\beta.$$

A centripetális gyorsulásra az $a_c = v^2/(R-r)$ képletből (4) felhasználásával kapjuk:

$$a_c = (4/3)g(\cos\ \alpha - \cos\ \alpha_0).$$

A (6)–(9) egyenletek megoldása az erőkre

(10) $$N = \frac{7\ \cos\ \alpha - 4\ \cos\ \alpha_0}{3}\, mg,$$

(11) $$S = \frac{mg\ \sin\ \alpha}{3}.$$

Az eredő erő abszolút értéke:

(12) $$F = \sqrt{N^2 + S^2},$$

ekkora erővel nyomja a henger a vályút.

A feladat numerikus adataival (4), (5) és (12) szerint

$\alpha = 30°$-nál	$v = 1,09$ m/s,	$\omega = 1,46\ \mathrm{s}^{-1}$	és	$F = 13,6$ kp,
$\alpha = 0°$-nál pedig	$v = 1,28$ m/s,	$\omega = 1,70\ \mathrm{s}^{-1}$	és	$F = 16,7$ kp

adódik.

Korsós Gábor (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Csúszásmentes gördülés csak akkor következhet be, ha a mozgás során végig fennáll az $S \leq uN$ egyenlőtlenség. A (10) és (1I) egyenletek felhasználásával ebből kapjuk a súrlódási együtthatóra a

$$\mu \geq \frac{\sin\ \alpha}{7\ \cos\ \alpha - 4\ \cos\ \alpha_0} \geqq \frac{\sin\ \alpha_0}{7\ \cos\ \alpha_0 - 4\ \cos\ \alpha_0} = (1/3)\ \mathrm{tg}\ 60° = 0,58$$

megszorítást.

Pályi Imre (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)

2. Sok megoldó helytelen gondolatmenettel (lásd az 1128. feladatot) a (3) kényszerfeltétel helyett a $v = \frac{R-r}{R} r\omega$ összefüggést adta meg a csúszásmentes gördülés feltételeként. Hasonló okokból hibás több példatár megoldása is (p1. Pálfai: Felvételi tájékoztató és példatár, 373. feladat; Dér–Radnai–Soós: Fizikai feladatok I. kötet, 7.34 feladat). A (3) feltétel helyességéről úgy is meggyőződhetünk, hogy egy vályúhoz csatlakozó sík lapon nézzük a mozgást. A sík pályán nyilván érvényes a $v = r\omega$ összefüggés, és ha a vályúban ez nem teljesülne, akkor a csatlakozásuknál vagy a súlypont sebességének, vagy a szögsebességnek ugrásszerűen meg kellene változnia. Ez pedig a dinamika alapegyenletei szerint nem lehetséges.

3. Több megoldó a $g = 10\ \mathrm{m/s}^2$ értékkel számolt. Ez helyes abban az esetben, ha elhanyagolhatónak vesszük az így adódó kb. 2 %-os hibát. Ekkor viszont nincs értelme a végeredményt 3 tizedesjegy pontossággal megadni, hiszen a harmadik jegy már hibás.