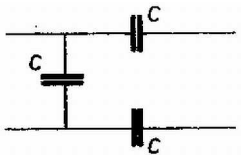
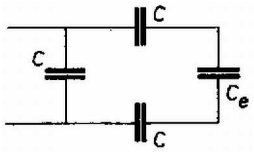
I. megoldás. A végtelen kondenzátorlánc az 1. ábrán látható „láncsszem” végtelen sokszori ismétléseként állítható elő.



1. ábra

Ha a lánc első szemét levágjuk, ugyanúgy végtelen sok láncszemünk van, mint előbb, tehát a visszamaradó lánc kapacitása az eredeti C_e kapacitással egyezik meg. A láncot így a 2. ábrán látható módon rajzolhatjuk.



2. ábra

Ebből az eredő kapacitásra kapjuk a következő egyenletet:

$$C_e = C + \frac{1}{2/C + 1/C_e}.$$

Rendezés után:

$$C_e^2 - CC_e - C^2/2 = 0.$$

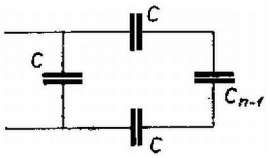
Az eredő kapacitást az egyenlet pozitív gyöke adja meg:

$$C_e = \frac{1+\sqrt{3}}{2}C.$$

Meszéna Géza (Bp., Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A végtelen lánc vagdalása igen szemléletes, de matematikai szempontból nem tiszta. Ezen segít a II. megoldás.

II. megoldás. Jelöljük az n láncszemből álló lánc kapacitását C_n-nel.



3. ábra

C_n-et könnyen kifejezhetjük C_{n-1} segítségével a 3. ábra alapján:

$$C_n = C + \frac{1}{2/C + 1/C_{n-1}} = \frac{3C_{n-1}+C}{2C_{n-1}+C} \cdot C.$$

Nyilván $C_n > C$, és a számláló növelése miatt

$$C_n < \frac{4C_{n-1}+2C}{2C_{n-1}+C} \cdot C = 2C.$$

Tehát a C_n számsorozat korlátos. Most bebizonyítjuk, hogy a sorozat monoton.

$$C_n - C_{n-1} = \left(\frac{3C_{n-1}+C}{2C_{n-1}+C} - \frac{3C_{n-2}+C}{2C_{n-2}+C}\right) C =$$

$$= \frac{C^2}{(2C_{n-1}+C)(2C_{n-2}+C)}(C_{n-1} - C_{n-2}).$$

Az első tényező pozitív, tehát ha $C_{n-1} > C_{n-2}$, akkor $C_n > C_{n-1}$, vagy ha $C_{n-1} < C_{n-2}$, akkor$C_n < C_{n-1}$. Korlátos, monoton sorozatnak van határértéke, ezt jelöljük C_e-nel. Ez lesz a „végtelen" hosszú kondenzátorlánc kapacitása. Mivel a C_n sorozat konvergens,

$$\lim_{n\to\infty}(C_n - C_{n-1}) = C_e - \left(C + \frac{1}{2/C + 1/C_e}\right) = 0.$$

Ez egyenlet C_e-re, melynek pozitív megoldása

$$C_e = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot C.$$

Weber József (Bp., Leöwey Klára Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. A gyakorlatban végtelen kondenzátorlánc nincs. Feladatunk eredménye azt jelenti, hogy elegendően hosszú véges kondenzátorlánc kapacitása mérési hibán belül a $\frac{1+\sqrt{3}}{2}C$ érték lesz.

Meszéna Géza (Bp., Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)