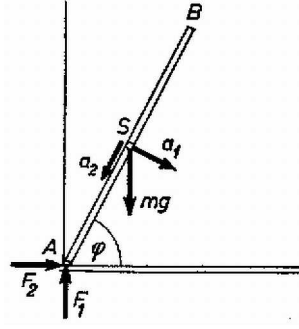


I. megoldás. Vizsgáljuk először az a) esetet! A rúd az mg súlyerő és a falak F_1 és F_2 nyomóerőinek hatására az A pont körül gyorsuló forgómozgást végez.



A súlypont gyorsulását felbonthatjuk érintőirányú a_1 és rúd irányú a_2 összetevőkre. Abban a pillanatban, amikor a rúd elválik a függőleges faltól, F_2 -nek nullának kell lennie. Ekkor viszont vízszintes erő hiányában a súlypont gyorsulásának sem lehet vízszintes összetevője, vagyis

$$(1) \quad a_1 \sin \varphi - a_2 \cos \varphi = 0.$$

a_1 nagyságát a forgómozgás alapegyenletéből számolhatjuk ki, felhasználva, hogy a rúd végpontjára $\Theta_A = (1/3) mL^2$ és $a_1 = (L/2)\beta$:

$$(2) \quad m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cos \varphi = \frac{1}{3} \cdot m \cdot L^2 \cdot \frac{2a_1}{L},$$

$$\text{ahonnan } a_1 = \frac{3}{4} \cdot g \cdot \cos \varphi.$$

A rúd irányú gyorsulás az ω szögsebességgel kifejezve

$$a_2 = \frac{L}{2} \omega^2.$$

Az energia-tétel alapján

$$(3) \quad mg \frac{L}{2} (1 - \sin \varphi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} mL^2 \cdot \omega^2, \text{ ahonnan } a_2 = \frac{3}{2} g (1 - \sin \varphi)$$

adódik. Visszahelyettesítve (2)-t és (3)-at, az (1) összefüggésbe, az elválás szögére kapjuk

$$\sin \varphi = 2/3, \quad \text{azaz } \varphi \approx 42^\circ.$$

A továbbiakban a súlypont sebességének vízszintes összetevője nem változik, megtartja a

$$(4) \quad v_x = \frac{L}{2} \cdot \omega \cdot \sin \varphi = \frac{1}{3} \sqrt{Lg}$$

értéket. A talajra érkezés pillanatában a súlypont v_s függőleges sebességét az energiamegmaradás tételéből számíthatjuk ki. Mivel az A pontnak nincs függőleges sebessége, ezért a rúdnak $\omega' = \frac{v_s}{L/2}$ szögsebességgel kell rendelkeznie.

A rúd teljes mozgási energiája a súlypont kinetikus energiája és az $\frac{1}{2} \Theta_s \cdot \omega'^2$ forgási energia összegeként áll elő, ahol $\Theta_s = \frac{1}{12} mL^2$ a súlypontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

$$mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_s^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} mL^2 \cdot \left(\frac{2v_s}{L} \right)^2,$$

ahonnan (4) felhasználásával

$$v_s = \sqrt{\frac{2Lg}{3}}$$

adódik.

A földetérés pillanatában tehát az A pont $(1/3)\sqrt{Lg}$ vízszintes, a B pont ugyanekkor vízszintes és $2v_s = \sqrt{\frac{8Lg}{3}}$ függőleges sebességgel rendelkezik (a B pont teljes sebessége $5\sqrt{Lg/3}$).

A b) esetben ugyanezeket a lépéseket végigkövetve valamennyi keresett mennyiségre ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az a) esetben.

Bóc István (Bp., Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Az energiatétel alkalmazásával tetszőleges φ szöghöz kiszámíthatjuk a súlypont sebességének vízszintes összetevőjét:

$$(5) \quad \begin{aligned} mg \frac{L}{2} (1 - \sin \varphi) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} mL^2 \omega^2, \\ v_x = \frac{L}{2} \omega \cdot \sin \varphi &= \sqrt{\frac{3}{4} \cdot L \cdot g \cdot (1 - \sin \varphi) \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Ez a függvény φ csökkenésével eleinte növekszik, majd egy maximumhely után csökkenni kezd. Másrészt a függőleges fal csak tolni tudja a rudat, ezért v_x nagysága nem csökkenhet. Az ellentmondás feloldása nyilván az, hogy (5) képlet csak a maximumhelyig érvényes, utána a rúd elválk a függőleges faltól és az összenergiához a haladó mozgás energiája is járulékot ad. A legnagyobb v_x -et az $f(\varphi) = (1 - \sin \varphi) \sin^2 \varphi$ függvény maximuma határozza meg, ezt viszont az

$$f'(\varphi) = 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi - 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi = 0$$

egyenlet megoldásai között kell keresnünk. A $\cos \varphi = 0$ és $\sin \varphi = 0$ egyenletek a sebességminimumokat adják meg, ezért a maximális sebesség elérését, vagyis a faltól való elválást a

$$\sin \varphi = 2/3$$

összefüggés határozza meg.

A megoldás további menete azonos az I. megoldással. A b) esetben a súlypont végig ugyanolyan pályán mozog, mint az a) esetben, az energiatétel mindkét esetben azonos alakú, így a megoldások is megegyeznek.

Kövér András (Debrecen, KLTE Gyak Gimn., IV. o. t.)