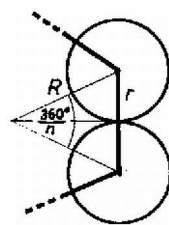


I. megoldás. Célszerű először a geometriai viszonyokat tisztáznunk. Ha n darab r sugarú golyóból szorosan egy szabályos sokszöget rakunk ki, akkor az 1. ábra szerint a golyók középpontjának és a sokszög középpontjának távolsága



1. ábra

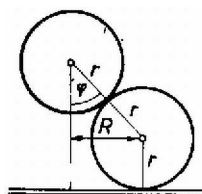
$$(1) \quad R = \frac{r}{\sin 180^\circ/n}.$$

A középre helyezett golyó csak akkor támaszkodik a többire, ha

$$R < 2r, \quad \text{vagyis ha } n < 6.$$

Ellenkező esetben valamennyi golyó az asztallapon nyugszik és nyilvánvalóan súrlódás nélkül is egyensúlyban van. Elegendő tehát az $n = 3, 4$ és 5 eseteket vizsgálnunk.

Válasszunk ki egy golyót az alsók közül és rajzoljuk le ezt, valamint a középső golyót oldalnézetből (2. ábra).



2. ábra

A későbbiekben szükségünk lesz a golyók középpontját összekötő egyenes és a függőleges által bezárt φ szög nagyságára. A 2. ábráról leolvasható, hogy

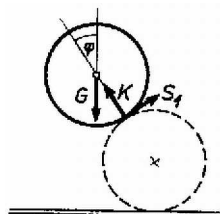
$$\sin \varphi = \frac{R}{2r},$$

vagyis (1) felhasználásával

$$(2) \quad \sin \varphi = \frac{1}{2 \cdot \sin 180^\circ/n}.$$

Ezek után rátérhetünk a feladat fizikai részének megoldására. Merev testek nyugalmi állapotát akarjuk leírni, ennek pedig az a szükséges és elegendő feltétele, hogy a testekre ható erők eredője, valamint a forgatónyomatékok összege nulla legyen. Mivel a rendszer több testből áll, az egyensúly feltételének mindegyik testre külön-külön teljesülnie kell.

Írjuk le először a középső golyó egyensúlyát (3. ábra).



3. ábra

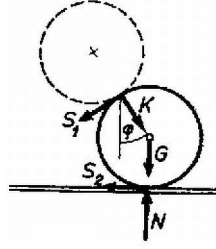
A testre G súlyerő, valamint ismeretlen nagyságú K nyomóerő és S_1 súrlódási erő hat. Az utóbbi két erő természetesen n -szer lép fel, de csak egyet-egyet tüntettünk fel a rajzon. Érdemes az erőket függőleges és vízszintes összetevőkre bontanunk.

A függőleges összetevők egyensúlyának feltétele:

$$(3) \quad G - n(K \cos \varphi + S_1 \sin \varphi) = 0.$$

A vízszintes összetevők eredője, valamint a forgatónyomatékok összege szimmetria-okokból nyilván nulla.

Az asztallapon fekvő golyók mindegyikére a 4. ábrán látható erők hatnak.



4. ábra

A nyomó- és súrlódási erők nagysága Newton III. axiómája értelmében megegyezik a 3. ábrán felvett erők nagyságával. N az asztal nyomóerejének, S_2 az asztallap és a golyó közti súrlódási erőnek a nagyságát jelöli. Az alsó golyók nem hatnak egymásra semmilyen erővel, hiszen a legkisebb nyomóerő eltávolítaná őket egymástól, összeszorító erő hiányában viszont súrlódási erő sem léphet fel. Ismét felírhatjuk a függőleges és vízszintes erőkomponensek egyensúlyának feltételét:

$$(4) \quad K \cos \varphi + S_1 \sin \varphi + G - N = 0,$$

$$(5) \quad K \sin \varphi - S_1 \cos \varphi - S_2 = 0.$$

A forgatónyomatékok összege bármely pontra vonatkoztatva nulla kell, hogy legyen. A golyó középpontjára felírva:

$$(6) \quad S_1 r - S_2 r = 0.$$

Vigyáznunk kell, a súrlódási erő és a nyomóerő között nem áll fenn az $F_s = \mu F_{ny}$ összefüggés, hiszen a testek nem csúsznak egymáson, hanem az $F_s \leq \mu F_{ny}$ egyenlőtlenség érvényes. Jelen esetben az egyensúly feltételéhez szükséges az

$$(7) \quad S_1 \leq K, \quad \text{és} \quad S_2 \leq \mu \cdot N$$

egyenlőtlenségek mindegyikének teljesülése.

A (3)–(6) egyenletrendszer egyértelműen meghatározza az S_1 , S_2 , K és N ismeretleneket. A megoldás

$$N = \frac{n+1}{n} G, \quad K = \frac{1}{n} G, \quad S_1 = S_2 = \frac{G}{n} \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}.$$

Ezeket (7)-be helyettesítve a

$$(8) \quad \mu \geq \frac{1}{n+1} \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi},$$

illetve a

$$(9) \quad \mu \geq \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

feltételeket kapjuk. Mivel (9) erősebb megszorítást jelent, mint (8), ezért az egyensúly szükséges és elégséges feltétele:

$$(10) \quad \mu \geq \operatorname{tg}(\varphi/2).$$

Az utolsó lépésnél felhasználtuk a

$$\frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} \equiv \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

trigonometriai azonosságot. (2) alapján $\sin \varphi$ -t kifejezhetjük n -nel, így végül n darab golyónál a súrlódási együtthatóra alsó korlátként a

$$(11) \quad \mu_n = 2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} - \sqrt{4 \cdot \sin^2 \frac{180^\circ}{n} - 1}$$

kifejezést kapjuk. A megfelelő numerikus értékek

$$\mu_3 = \sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0,32, \quad \mu_4 = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41, \quad \mu_5 \approx 0,56.$$

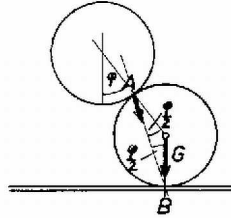
A (11) képlet formálisan érvényes $n = 2$ és $n = 6$ értékekre is. Az előbbi esetben $\mu_2 = 2 - \sqrt{3} = 0,27$, de ilyenkor nincs értelme sokszögről beszélni és az egyensúly labilis. $n = 6$ -ra $\mu_6 = 1$, ami csak akkor helyes, ha valamilyen módon biztosítani tudjuk, hogy a középső golyó ne támaszkodjék az asztalra – hiszen ezt a számítás során kihasználtuk.

Például a középső golyót egy nagyon kicsivel nagyobbra készíthetjük a többinél, vagy pedig egy kicsit horpadt felületre helyezzük a golyókat.

Ábrahám Tibor (Eger, Gárdonyi G. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

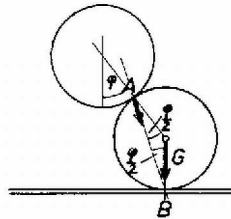
II. megoldás. A feladatot megoldhatjuk szerkesztéssel is. Az asztalon levő bármely golyó akkor van egyensúlyban, ha a rá ható erők eredője nulla és hatásvonaluk egy ponton megy át. Ez utóbbi feltétel a forgatónyomatékok egyensúlyát biztosítja.

A G súlyerő, az asztal nyomóereje és az asztalnál fellépő súrlódási erő egyaránt a B ponton halad át (5. ábra).



5. ábra

Szükséges tehát, hogy a felső golyó által kifejtett erő (nyomóerő+súrlódási erő), amelynek hatásvonala az A ponton biztosan átmegy, szintén a B ponton haladjon át. Ez annyit jelent, hogy az érintkezési felületre merőleges egyenes és az erő hatásvonala $\varphi/2$ szöget zár be. A (7) feltétel szerint viszont az egyensúly feltétele éppen az, hogy ezen szög tangense kisebb legyen, mint μ . Így közvetlenül megkaptuk (10) egyenlőtlenséget.



6. ábra

Az asztal és a golyó között ható erő a 6. ábra alapján biztosan kisebb szöget zár be a függőlegessel, mint $\varphi/2$, ezért a (10) feltétel egyben azt is biztosítja, hogy az asztallapnál sem csúszhatnak meg a golyók.

Prőhle Péter (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A numerikus számítás eredményét összefoglaljuk a következő táblázatban :

n	T	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	μ
2	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 0,268$
3	$35,2^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = 0,318$
4	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 = 0,414$
5	$58,7^\circ$	$\frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{3}$	$\frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} = 0,559$
6	90°	1	0	1 = 1