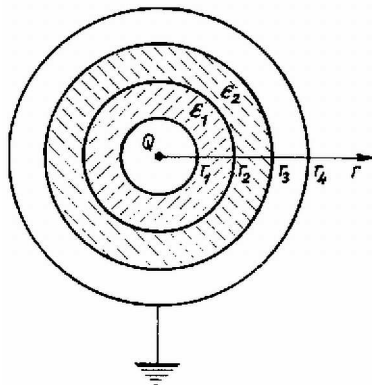




Számoljunk MKSA-rendszerben.

a) Legyen a középponttól r távolságban az eltolásvektor nagysága $D(r)$. Gauss törvényéből

$$(1) \quad D(r) = Q/(4r^2\pi) = \varepsilon\varepsilon_0 E(r),$$

ahol ε_0 a vákuum dielektromos állandója, $E(r)$ az elektromos térerősség, ε a közeg relatív dielektromos állandója. (1)-ből

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq r < 0,1 \text{ m,} \\ Q/(4r^2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0) = -90/r^2 \text{ (V/m),} & \text{ha } 0,1 \text{ m} \leq r < 0,2 \text{ m,} \\ Q/(4r^2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0) = -150/r^2 \text{ (V/m),} & \text{ha } 0,2 \text{ m} \leq r < 0,3 \text{ m,} \\ Q/(4r^2\pi\varepsilon_0) = -450/r^2 \text{ (V/m),} & \text{ha } 0,3 \text{ m} \leq r < 0,4 \text{ m,} \\ 0 & \text{ha } 0,4 \text{ m} \leq r. \end{cases}$$

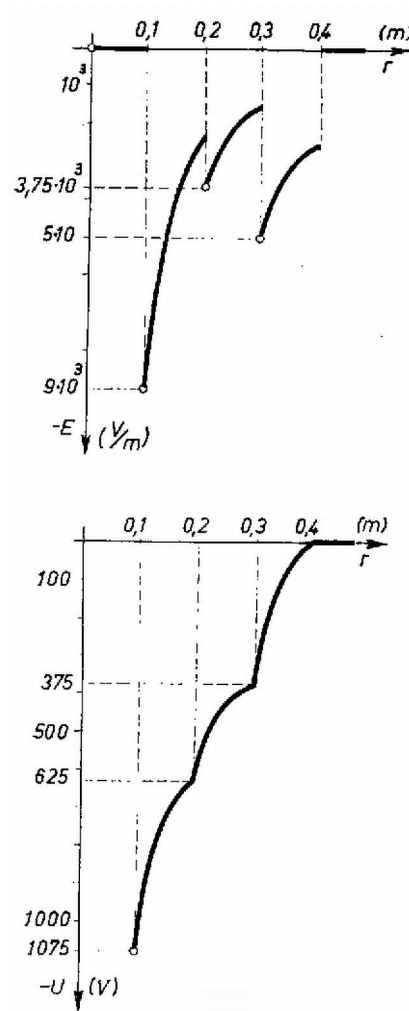
Kihasználtuk, hogy a földelt gömbfelületen $-Q$ (vagyis pozitív!) töltés jelenik meg; ezért lett $D(r) = 0$, ha $r > r_4$. Definíció szerint a potenciálfüggvény:

$$U(r) = - \int_{r_4}^r E(r) dr = \begin{cases} 0 & \text{ha } r_4 \leq r, \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_4} \right), & \text{ha } r_3 \leq r < r_4, \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} - \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3} \right) \right], & \text{ha } r_2 \leq r < r_3, \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} + \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) \right], & \text{ha } r_1 \leq r < r_2, \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} + \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right], & \text{ha } 0 \leq r < r_1. \end{cases}$$

Ugyanez számszerűen:

$$U(r) = \begin{cases} -1075 \text{ (V),} & \text{ha } 0 \leq r < 0,1 \text{ m,} \\ -90/r - 175 \text{ (V),} & \text{ha } 0,1 \text{ m} \leq r < 0,2 \text{ m,} \\ -150/r + 125 \text{ (V),} & \text{ha } 0,2 \text{ m} \leq r < 0,3 \text{ m,} \\ -450/r + 1125 \text{ (V),} & \text{ha } 0,3 \text{ m} \leq r < 0,4 \text{ m,} \\ 0 \text{ V} & \text{ha } 0,4 \text{ m} \leq r. \end{cases}$$

A számítás során a potenciális energia nullnívóját a középponttól r_4 távolságban vettük fel. Az 1. ábrán jól látható, hogy a térerősség függvénynek a dielektrikumok határánál szakadása van, a potenciálfüggvénynek pedig töréspontja.



1. ábra

b) A belső fémgömb töltése Q , felületén a töltéssűrűség

$$\sigma_1 = Q/(4\pi r_1^2) = -3,9 \cdot 10^{-7} \text{ C m}^{-2}.$$

Az ε_1 dielektromos állandójú szigetelő belső felületén $-Q(1 - 1/\varepsilon_1)$, külső felületén $Q(1 - 1/\varepsilon_1)$ polarizációs töltés jelenik meg, ami a belső felületen

$$\sigma_2 = -Q(1 - 1/\varepsilon_1)/(4\pi r_1^2) = 3,1 \cdot 10^{-7} \text{ C m}^{-2},$$

a külsőn pedig

$$\sigma'_2 = Q(1 - 1/\varepsilon_1)/(4\pi r_2^2) = -7,9 \cdot 10^{-8} \text{ C m}^{-2}$$

töltéssűrűséget hoz létre. Hasonlóan az ε_2 dielektromos állandójú közeg belső és külső felületén a töltéssűrűség rendre

$$\sigma_3 = -Q(1 - 1/\varepsilon_2)/(4\pi r_2^2) = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ C m}^{-2} \text{ és}$$

$$\sigma'_3 = Q(1 - 1/\varepsilon_2)/(4\pi r_3^2) = -2,9 \cdot 10^{-8} \text{ C m}^{-2}.$$

A külső fémfelületen a töltéssűrűség

$$\sigma_4 = -Q/(4\pi r_4^2) = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ C m}^{-2}.$$

c) A rendszer kapacitása

$$C = Q/U(r_1) = 4\pi\varepsilon_0/[1/r_3 - 1/r_4 + (1/r_2 - 1/r_3)/\varepsilon_2 + (1/r_1 - 1/r_2)/\varepsilon_1] = 46 \text{ pF}.$$

d) A térfogatban foglalt teljes energia:

$$W = (1/2)QU(r_1) = 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$

e) Az energiasűrűség:

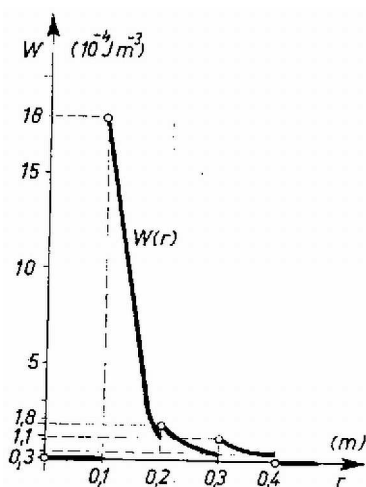
$$w(r) = (1/2)E(r)D(r) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq r < r_1, \\ Q^2/(32r^4\pi^2\varepsilon_1\varepsilon_0), & \text{ha } r_1 \leq r < r_2, \\ Q^2/(32r^4\pi^2\varepsilon_2\varepsilon_0), & \text{ha } r_2 \leq r < r_3, \\ Q^2/(32r^4\pi^2\varepsilon_0), & \text{ha } r_3 \leq r < r_4, \\ 0 & \text{ha } r_4 \leq r. \end{cases}$$

ill. számszerűen:

$$w(r) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq r < 0,1 \text{ m, vagy } 0,4 \text{ m} \leq r, \\ 1,8 \cdot 10^{-7}/r^4 (\text{J m}^{-3}), & \text{ha } 0,1 \text{ m} \leq r < 0,2 \text{ m,} \\ 2,9 \cdot 10^{-7}/r^4 (\text{J m}^{-3}), & \text{ha } 0,2 \text{ m} \leq r < 0,3 \text{ m,} \\ 8,9 \cdot 10^{-7}/r^4 (\text{J m}^{-3}), & \text{ha } 0,3 \text{ m} \leq r < 0,4 \text{ m.} \end{cases}$$

A 2. ábrán látszik, hogy az energiasűrűség a középponttól távolodva rohamosan csökken (r^{-4} -nel arányosan).

Balog János (Bp., I. István Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján



2. ábra

Megjegyzések. **1.** A rendszer energiáját az energiasűrűségből is kiszámolhatjuk:

$$W = \int_V w dV = \int_{r_1}^{r_4} w(r) 4r^2 \pi dr.$$

2. Gondoljunk a szigetelők határfelületén vékony vezető réteget. Az elektrosztatikai viszonyok változatlanok maradnak, mert e felületek ekvipotenciálisak. A rendszer kapacitását így három sorosan kötött gömbkondenzátor kapacitásának eredőjeként kapjuk:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \left/ \left[\frac{r_4 - r_3}{r_3 r_4} + \frac{r_3 - r_2}{\varepsilon_2 r_2 r_3} + \frac{r_2 - r_1}{\varepsilon_1 r_1 r_2} \right] \right.$$