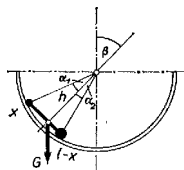


Könnyen belátható, hogy a súlyzó csak akkor lehet egyensúlyban, ha a tengelyét és a gömb középpontját tartalmazó sík függőleges.

Jellemezzük a súlyzó helyzetét a súlypontját a gömb középpontjával összekötő egyenesnek a függőlegessel bezárt β szögével! Az 1. ábrán látható α_1 , α_2 , h értékek m_1 , m_2 , m_3 , l és r ismeretében a súlypont definíciójának felhasználásával meghatározhatók.



1. ábra

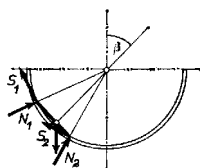
Ha

$$x = l \frac{m_1 + m_3/2}{m_1 + m_2 + m_3}$$

akkor a súlyzó súlypontjának a félgömb középpontjától mért távolsága

$$h = \sqrt{r^2 + x^2 - lx}, \quad \text{továbbá} \quad \cos \alpha_1 = \frac{2r^2 - lx}{2rh}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{2r^2 - l(l-x)}{2rh}.$$

A 2. ábrán felrajzoltuk a súlyzóra ható erőket.



2. ábra

Az egyensúly feltétele: az erők összege és a forgatónyomatékok összege nulla.

- (1) $N_1 \sin(\beta + \alpha_1) - S_1 \cos(\beta + \alpha_1) + N_2 \sin(\beta - \alpha_2) - S_2 \cos(\beta - \alpha_2) = 0,$
- (2) $N_1 \cos(\beta + \alpha_1) + S_1 \sin(\beta + \alpha_1) + N_2 \cos(\beta - \alpha_2) + S_2 \sin(\beta - \alpha_2) - G = 0,$
- (3) $S_1 r + S_2 r - Gh \sin \beta = 0,$

ha $G = m_1 g + m_2 g + m_3 g.$

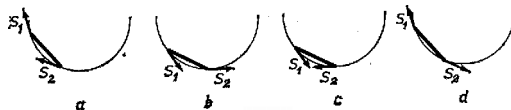
Az S_1 és S_2 súrlódási erőkről csak annyit tudunk, hogy nagyságuk

$$|S_1| \leq \mu N_1, \quad (4) \quad S_2 \leq \mu N_2. \quad (5)$$

A (4) és (5) feltételt kielégítő, egyébként tetszőlegesen megválasztott súrlódási erőket az (1), (2), (3) egyenletrendszerbe helyettesítve megkapjuk a súlyzó egy lehetséges egyensúlyi helyzetét. Láthatjuk tehát, hogy az egyensúlyi helyzet nem pontosan határozott. Bizonyos azonban, hogy (4), (5)-nek megfelelően a súrlódási erők nagysága legfeljebb $|S_1| = \mu N_1$, $|S_2| = \mu N_2$ lehet. Attól függően, hogy a súrlódási erők iránya a 2. ábrán berajzolttal egyezik vagy ellentétes, a fenti két egyenlőség alapján a következő egyenletpárokat kaphatjuk:

$$\begin{array}{llll} S_1 = \mu N_1, & (4a) & -S_1 = \mu N_1, & (4b) & -S_1 = \mu N_1, & (4c) & S_1 = \mu N_1, & (4d) \\ S_2 = \mu N_2, & (5a) & -S_2 = \mu N_2, & (5b) & S_2 = \mu N_2, & (5c) & -S_2 = \mu N_2, & (5d) \end{array}$$

(A 3. ábrán feltüntettük a súrlódási erők valódi irányát mind a négy esetben.)



3. ábra

Az a), b), c), d) egyenletpárok bármelyikét is csatoljuk az (1), (2), (3) egyenletekhez, ötismeretlenes egyenletrendszert kapunk, melyet a matematikai nehézségek leküzdése után β -ra megoldhatunk.

Végeredményben az $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ jelöléssel:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \beta_a &= \frac{(h/\mu r)(1 - \mu^2) \sin^2 \alpha + (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \sin \alpha + (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1)(1 - \cos \alpha)\mu}{(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \sin \alpha + (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)(1 - \cos \alpha)\mu}, \\ \operatorname{ctg} \beta_b &= -\frac{(h/\mu r)(1 - \mu^2) \sin^2 \alpha + (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \sin \alpha + (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1)(1 - \cos \alpha)\mu}{(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \sin \alpha + (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)(1 - \cos \alpha)\mu}, \\ \operatorname{ctg} \beta_c &= \frac{(l/\mu r) \frac{\mu^2(1 + \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha - 2\mu \cos \alpha \sin \alpha}{\mu(\cos \alpha - 1) - \sin \alpha} - \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}, \\ \operatorname{ctg} \beta_d &= \frac{(l/\mu r) \frac{\mu^2(1 + \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha + 2\mu \cos \alpha \sin \alpha}{\mu(\cos \alpha - 1) + \sin \alpha} - \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}, \end{aligned}$$

A súlyzó két szélső helyzetét nem túl nagy μ esetén β_a és β_b határozza meg. β_b negatív előjele kifejezi azt, hogy ekkor a súlyzó a 2. ábrán láthatóval ellentétes oldalon van. Ellenőrizhetjük, hogy a kapott eredmény egyes speciális esetekben ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\mu = 0$) is helyes értéket ad.

β_d -ből – mint az a 3d ábra alapján várható volt – semmi érdekes következtetést sem tudunk levonni. Érdeemes megfigyelni, hogy amennyiben $\mu(\cos \alpha - 1) = \sin \alpha$, akkor a c) esetben β_c értéke független a súlypont helyzetétől. Ez annak felel meg, hogy a súlyzó beszorul a gömbbe, aminek feltétele egyszerűbb alakban:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \mu.$$

Ha tehát a súrlódási tényező elegendően nagy, akkor a súlyzó bárhol egyensúlyban lehet. A fenti eredmény hasonló az ék vizsgálatánál kapott feltételhez.

Megjegyzés. Sok megoldó abból a feltevésből indult ki, hogy $S = \mu mg \cos \alpha$, ami csak egyes speciális esetekben igaz. Általában célszerű a fentihez hasonló gondolatmenettel egyenletrendszert felállítani.

Voltak, akik csak az egyenleteket írták fel, és nem is próbálkoztak azok megoldásával. Így a feladat megoldásának nagyon tanulságos részét mulasztották el.

Senki sem vette észre, hogy a súlyzó beszorulhat a gömbbe.