

Ha a zérus potenciálú felületet földelt fémlemezzel helyettesítjük, az erőterben semmi sem változik, hiszen a földelt fémlemez potenciálja zérus. Ezért a térerősség ugyanakkora marad, mint a fémlemez odahelyezése előtt volt.

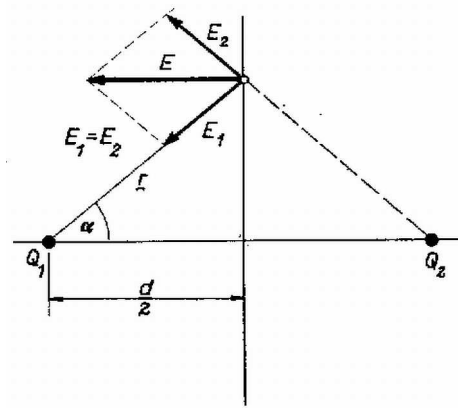
Vegyük fel a koordinátarendszer origóját a Q_1 töltés helyén. Q_2 koordinátái legyenek: $(0, d, 0)$. Határozzuk meg azon $P(x, y, z)$ pontok mértani helyét, melyekre a potenciál értéke zérus! A

$$(1) \quad \frac{Q_1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{Q_2}{[x^2 + (y - d)^2 + z^2]^{1/2}} = 0$$

egyenletet nyerjük, melyből $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ és $k = \left| \frac{Q_2}{Q_1} \right|$ jelöléssel a zérus potenciálú felület egyenlete:

$$(2) \quad (1 - k^2)r^2 = d(2y - d).$$

a) $Q_1 = -Q_2$, tehát $k = 1$. A zérus potenciálú felület az $y = d/2$ sík.



1. ábra

Az 1. ábra alapján a térerősség:

$$(3) \quad E = 2E_1 \cos \alpha = 2E_1 \cdot \frac{d}{2r} = E_1 \cdot \frac{d}{r}.$$

$$(4) \quad \text{Mivel } E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2},$$

$$(5) \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 d}{r^3}.$$

A felületi töltéssűrűség definíció szerint:

$$(6) \quad \sigma = \epsilon_0 E = \frac{1}{4\pi} \frac{Q_1 d}{r^3}.$$

A feladat számadataival (ha r -et méterben mérjük):

$$E = \frac{90}{r^3} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right], \quad \text{és} \quad \sigma \approx \frac{8 \cdot 10^{-10}}{r^3} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right]$$

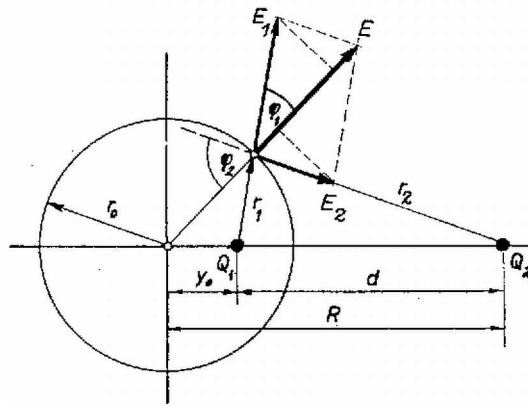
b) A zérus potenciálú felület egyenlete $Q_1 \neq -Q_2$ esetben:

$$x^2 + \left(y \frac{d}{1 - k^2} \right)^2 + z^2 = \left(\frac{kd}{k^2 - 1} \right)^2.$$

Ez a felület tehát egy gömb, melynek középpontja az $O\left(0, \frac{d}{1 - k^2}, 0\right)$ pontban van, sugara: $r_0 = \frac{kd}{k^2 - 1}$

(a feladat számadataival: $O\left(0, -\frac{1}{15}, 0\right)$ és $r_0 = \frac{4}{15}$).

Határozzuk meg a térerősség nagyságát egy olyan körön, amelyet egy – a két töltésen átmenő – sík metsz ki a gömbből! Vegyük figyelembe, hogy az erő vonalak az ekvipotenciális felületre merőlegesek, és helyezzük a koordinátarendszer origóját a gömb középpontjába!



2. ábra

A 2. ábra alapján

$$(8) \quad E = E_1 \cos \varphi + E_2 \cos \varphi_2.$$

Cosinus – tétellel $\cos \varphi_1$ és $\cos \varphi_2$ kifejezhető:

$$(9) \quad \cos \varphi_1 = \frac{r_0^2 + r_1^2 - y_0^2}{2r_0r_1},$$

$$(10) \quad \cos \varphi_2 = \frac{R_0^2 + r_0^2 - y_2^2}{2r_0r_2},$$

Felhasználva a (8) – (10), továbbá a $kr_1 = r_2$, $kQ_1 = Q_2$ és $ky_0 = r_0$ összefüggéseket:

$$(11) \quad \begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2^3} \frac{1}{2r_0} \{k^2(r_0^2 + r_1^2 - y_0^2) + R^2 - r_0^2 - r_2^2\} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2^3} \frac{1}{2r_0} \{(k^2 - 1)r_0^2 + R^2 - k^2y_0^2\}. \end{aligned}$$

Vegyük figyelembe még, hogy $kr_0 = R$ 'es $R = d + y_0$. Ezzel

$$(12) \quad E = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(d + y_0)^2 - r_0^2}{r_0} \right] \frac{1}{r_2^3}$$

adódik. A felületi töltéssűrűség

$$(13) \quad \sigma = \epsilon_0 E = \frac{Q_2}{4\pi} \left[\frac{(d + y_0)^2 - r_0^2}{r_0} \right] \frac{1}{r_2^3}.$$

A feladat számadataival

$$E = \frac{1440}{r_2^3} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right], \quad \text{és} \quad \sigma = 1,27 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{r_2^3} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right].$$

Magyar László (Kecskemét, Katona J. Gimn., IV. o. t.)