

Egy α felületi feszültségű hátyából készült r sugarú buborékban a gáz nyomása (lásd Budó – Pócza: Kísérleti fizika):

$$p = p_0 + \frac{4\alpha}{r} = \frac{4\alpha}{r}, \text{ ha } p_0 = 0 \text{ a külső nyomás.}$$

Mivel

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} V^{1/3}, \quad \text{azért} \\ p &= \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} \cdot \frac{4\alpha}{V^{1/3}}, \quad \text{tehát} \\ pV^{1/3} &= \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} \cdot 4\alpha = \text{áll.} \end{aligned}$$

A 965. feladat megoldása szerint a gáz fajhője az ilyen folyamatokban

$$c = C_v + \frac{k}{1-n},$$

ahol C_v a molekulahő, k a Boltzmann-állandó. Esetünkben $n = 1/3$, tehát

$$c = C_v + (3/2)k,$$

függetlenül a buborék anyagától és a gáz állapotától.

Szlacsányi Kornél (Bp., Berzsényi D. Gimn., IV. o. t.)

Kiegészítés. Vizsgáljuk azt az általánosabb esetet, amikor a külső nyomás $p_0 \neq 0$! Ekkor a folyamat nem hozható $pV^n = \text{áll.}$ alakra, és a fajhő meghatározásánál végig kell járni a szokásos utat.

Az I. főtétel szerint a belső energia (U) változása (dU) egyenlő a hő formájában kapott energia (δQ) és a gáz által végzett munka összegével:

$$dU = \delta Q + (-p_0)dV + \alpha dA, \quad \text{ahol} \quad A = 2 \cdot 4r^2\pi$$

a folyadékréteg felszíne. (Jelen esetben nemcsak térfogati munka van, a folyadékfelszín növelése is energiát igényel.)

Ismert továbbá az ideális gáz állapotegyenlete $pV = NkT$, $U = C_v NT$, és a folyamatra jellemző egyenlőségek:

$$p = p_0 + \frac{4\alpha}{r}, \quad V = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Ennek alapján és a fajhő definíciója szerint:

$$c = \frac{1}{N} \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU - (-p_0) dV - \alpha dA}{N dT} = C_v + \frac{p_0 dV}{N dT} - \frac{\alpha dA}{N dT}.$$

A térfogat, felszín és a hőmérséklet változását kifejezzük a buborék sugarának kicsiny változása (Δr) segítségével:

$$\begin{aligned} dV &= (4/3)(r + \Delta r)^3 - (4/3)r^3\pi \approx 4r^2\pi \cdot \Delta r, \\ dA &= 4(r + \Delta r)^2\pi - 4r^2\pi \approx 8r\pi \cdot \Delta r, \\ dT &= \frac{1}{Nk}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{1}{Nk} \left[\left(p_0 + \frac{4\alpha}{r + \Delta r} \right) (4/3)(r + \Delta r)^3\pi - \left(p_0 + \frac{4\alpha}{r} \right) (4/3)r^3\pi \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{Nk} \left(\frac{32}{3}\alpha \cdot \pi \cdot r \cdot \Delta r + 4p_0\pi r^2\Delta r \right). \end{aligned}$$

(Δr egynél magasabb rendű hatványait tartalmazó tagokat elhanyagoltuk, továbbá felhasználtuk, hogy $\frac{1}{r + \Delta r} =$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{1}{1 + \Delta r/r} \right) \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\Delta r}{r} \right).$$

Behelyettesítve és a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve

$$c = C_v + \frac{k \left(\frac{p_0 r}{2\alpha} - 1 \right)}{\frac{4}{3} + \frac{p_0 r}{2\alpha}}.$$

Boros Endre (Bp., I. István Gimn., III. o. t.)