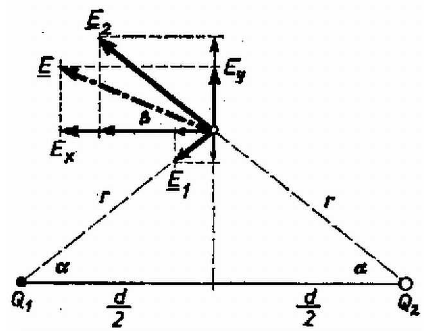
1) Két ponttöltés erőterének térerősségét a két töltéshez tartozó erőtér térerősségének vektori összegezésével kaphatjuk meg. A térerősség csak akkor lehet 0, ha a két töltéstől származó térerősség egyező nagyságú és ellentétes irányú. Mivel a Coulomb erő a töltést a ponttal összekötő egyenes mentén hat, ez csak a két töltést összekötő egyenesen, a két töltés ellenkező előjele miatt az összekötő szakaszon kívül, a kisebbikhez közelebb teljesülhet.



Ha r a 0 térerősségű pont Q_1 től mért távolsága, akkor

$$k\frac{Q_1}{Q_2}+k\frac{Q_2}{(r+d)^2}=0,\quad \text{innen}$$
$$(Q_1+Q_2)r^2+2Q_1rd+Q_1d^2=0,$$
$$r=\frac{-Q_1\pm\sqrt{-Q_1Q_2}}{Q_1+Q_2}d.$$

Numerikusan $r_1=-1/3$ m, ill. $r_2=1$ m. Feltételünknek $r=1$ m felel meg. Azonos $Q_1=Q_2\neq 0$ töltések esetén a térerősség ott 0, ahol $\dfrac{Q}{r^2}-\dfrac{Q}{(d-r)^2}=0$, ahonnan $r=d/2=0{,}5$ m.

b) Ponttöltés potenciálja tőle r távolságban kQ/r, több töltésre szuperponálódik, így a potenciál ott 0, ahol

$$\frac{Q_1}{r_1}+\frac{Q_2}{r_2}=0,\qquad \frac{r_1}{r_2}=\frac{-Q_1}{Q_2}=\frac{1}{4},$$

ahol r_1, ill. r_2 a Q_1, ill. Q_2-től mért távolság. Ez a feltétel egy Apollóniusz-gömböt határoz meg, mely a két töltést összekötő egyenest Q_1-től kifelé $1/3$ m, Q_2 felé $1/5$ m távolságra metszi, így középpontja Q_1-től kifelé $\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)\cdot\dfrac{1}{2}$ m $=$ $=\dfrac{1}{15}$ m-re van, sugara $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\right)\cdot\dfrac{1}{2}$ m $=\dfrac{4}{15}$ m. (Az egyenesen levő pontok *a)*-hoz hasonlóan kaphatók.)

Ha $Q_1=Q_2$, akkor $Q_1/r_1+Q_2/r_2$ mindkét tagja azonos előjelű, tehát sehol nem lehet 0.

c) A probléma hengerszimmetriája miatt elegendő a potenciál és a térerősség változását egy, a két töltésen átmenő síkban vizsgálni.

A potenciál additivitása miatt a felező merőlegesen az összekötő egyenestől x távolságra a potenciál

$$U=\frac{k(Q_1+Q_2)}{\sqrt{d^2/4+x^2}}=\frac{2k(Q_1+Q_2)}{d}\cos\alpha.$$

Különböző töltések esetén $U=9\cdot10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}\cdot 3\cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}\cdot 2\cos\alpha=540\ \mathrm{V}\cdot\cos\alpha$, egyenlő töltések esetén $U=-9\cdot10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}\cdot 2\cdot10^{-8}\ \mathrm{C}\cdot 2\cos\alpha=-360\ \mathrm{V}\cdot\cos\alpha$.

Az eredő térerősség kiszámításához bontsuk föl a térerősséget derékszögű komponensekre. Ekkor

$$E_x=E_2\cos\alpha-E_1\cos\alpha=\frac{k(Q_2-Q_1)}{r^2}\cos\alpha=$$
$$=\frac{k(Q_2-Q_1)4}{d^2}\cos^3\alpha=9\cdot10^9\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\cdot\frac{(4+1)\cdot10^{-8}\ \mathrm{C}\cdot4\cos^3\alpha}{1\ \mathrm{m^2}}=1800\ \mathrm{V/m}\cdot\cos^3\alpha,$$
$$E_y=E_1\sin\alpha+E_2\sin\alpha=\frac{k(Q_1+Q_2)}{r^2}\sin\alpha=\frac{k(Q_1+Q_2)4}{d^2}\cos^2\alpha\sin\alpha=$$
$$=9\cdot10^9\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\cdot\frac{(4-1)10^{-8}\mathrm{C}\cdot4\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{1\ \mathrm{m^2}}=1080\ \mathrm{V/m}\cdot\cos^2\alpha\sin\alpha$$

Így a térerősség abszolút értéke

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\frac{4k}{d^2}\cos^2\alpha\cdot\sqrt{(Q_2-Q_1)^2\cos^2\alpha+(Q_1+Q_2)^2\sin^2\alpha}=$$
$$=(4k/d^2)\cos^2\alpha\cdot\sqrt{Q_1^2+Q_2^2-2Q_1Q_2\cos2\alpha}=360\ \mathrm{V/m}\cdot\cos^2\alpha\cdot\sqrt{17+8\cos2\alpha},$$

irányszögének tangense

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{Q_2 + Q_1}{Q_2 - Q_1}\operatorname{tg}\alpha = 0{,}6\operatorname{tg}\alpha.$$

Ha $Q_1 = Q_2 = -10^{-8}$C, akkor $E_x = 0$, $E_y = E = \dfrac{8kQ}{d^2}\cos^2\alpha\sin\alpha = -720\ \mathrm{V/m}\cdot\cos^2\alpha\sin\alpha$, vagyis a térerősség a Q_1Q_2 szakasz felezőpontja felé irányul.

Éber Nándor (Bp., Móricz Zs. Gimn., III. o. t.)