

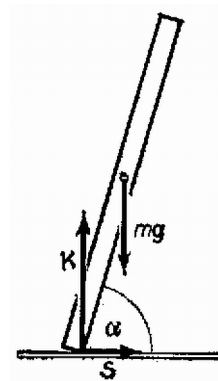
Az érme egy merev test, melynek mozgását úgy írhatjuk le, hogy megadjuk minden időpillanatban súlypontjának sebességét és a súlypont körüli forgás szögsebességét. A megoldáshoz a következő lépések vezetnek:

1. Felírjuk a testre ható erőket és meghatározzuk a súlypontra vonatkoztatott forgatónyomatékokat (dinamikai változók).
2. Kiszámítjuk a test súlypontjának sebességét, a forgás szögsebességét és ezek időbeli változását (kinematikai változók).
3. A Newton-egyenletek alapján kapcsolatot teremtünk az erők és gyorsulások, illetve a forgatónyomatékok és a szögsebesség megváltozása (szöggyorsulás) között (a dinamika alapegyenletei).
4. Figyelembe vesszük, hogy az érme csúszásmentesen gördül, és ezért a kinematikai változók nem függetlenek egymástól (kényszerfeltételek).
5. Megoldjuk a kapott egyenletrendszer.

Ezek a lépések minden olyan feladatnál alkalmazhatók, ahol egy merev test mozgását kell leírunk az erők ismeretében.

Nézzük meg, hogyan alakulnak a fenti lépések a jelen feladatnál!

1. Az érme mg súlyerő, az asztallap K nyomóereje és S súrlódási erő hat (1. ábra).



1. ábra

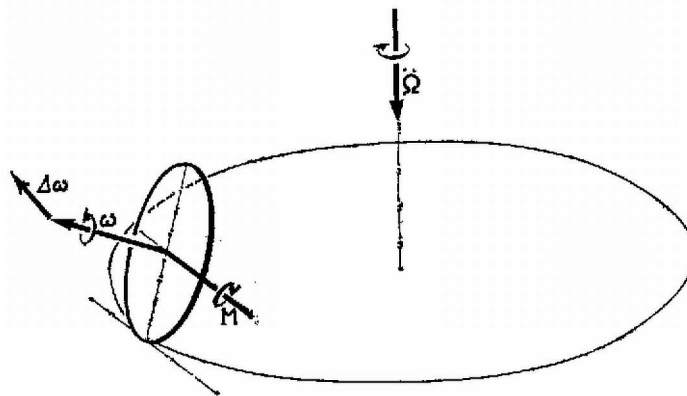
Ezen erők súlypontra vonatkoztatott forgatónyomatéka:

$$\mathbf{M} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i),$$

ahol $\mathbf{F}$ a testre ható erőket, $\mathbf{r}_i$ pedig a súlypontból az erők hatásvonalának tetszőleges pontjába mutató vektorokat jelöli (a vektoriális szorzás értelmezését l. a K. M. L. 1970. évi 6. számában közölt cikkben). A forgatónyomatékok nagysága

$$(1) \quad M = Kr \cos \alpha - Sr \sin \alpha,$$

és iránya az erők síkjára merőleges (2. ábra).



2. ábra

2. Feltételezzük, hogy az érme egyenletes szögsebességgel gurul egy R sugarú körpályán. Jelöljük az érme súlypontjának szögsebességét Ω -val, a szimmetriatengely körüli forgás szögsebességét pedig ω -val (2. ábra). Ha $R \gg r$, akkor a súlypont is jó közelítéssel R sugarú körpályán mozog és ezért a centripetális gyorsulás:

$$(2) \quad a = R\Omega^2.$$

Mivel ω -nak csak a nagysága állandó, iránya nem, ezért kérdezhetjük, hogy mennyit változik ω Δt idő alatt. Az érme Δt idő alatt $\Omega \cdot \Delta t$ szöggel fordul el, továbbá az ω vektor vízszintes vetülete $\omega \sin \alpha$, ezért

$$(3) \quad |\Delta \omega| = \Omega \Delta t \cdot \omega \sin \alpha.$$

$\Delta \omega$ iránya megegyezik $\mathbf{M}$ irányával.

3. Newton II. törvénye alapján (felhasználva; hogy a függőleges gyorsulás nulla)

$$(4) \quad mg - K = 0,$$

$$(5) \quad S = mR\Omega^2.$$

A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$(6) \quad \Delta \mathbf{N} = \mathbf{M} \Delta t,$$

ahol $\Delta \mathbf{N}$ az impulzusnyomaték megváltozása Δt idő alatt (részletesebben l. az idézett cikket vagy Budó-Pócza: Kísérleti Fizika I. 49. §-t). Ha $R \gg r$, akkor $\Omega \ll \omega$, és az érme impulzusnyomatéka jó közelítésben csak az ω szögsebességből adódik. Felhasználjuk, hogy a henger tehetetlenségi nyomatéka $I = (1/2)mr^2$, továbbá $N = I\omega$, ahonnan

$$(7) \quad \Delta \mathbf{N} = I \Delta \omega.$$

4. A tiszta legördülés feltétele

$$(8) \quad r\omega = R\Omega.$$

5. Az (1)–(8) egyenleteket összevetve kapjuk, hogy

$$m \cdot g \cdot r \cdot \cos \alpha - S \cdot r \cdot \sin \alpha = (1/2)m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \Omega \cdot \sin \alpha,$$

$$S = mR\Omega^2,$$

$$R\Omega = r\omega.$$

Az utóbbi három egyenlet megoldása:

$$(9) \quad \frac{R}{r} = \frac{3}{2} \frac{r\omega^2}{g} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$(10) \quad S = \frac{2}{3} \frac{mg}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Ha megadjuk a kezdeti dőlésszöget és szögsebességet (vagy az energiát), akkor ezekből meghatározhatjuk a körpálya sugarát.

Ha a súrlódási együttható μ , akkor a tapadás (vagyis a tiszta legördülés) előfeltétele: $S \leq mg\mu$, ahonnan

$$(11) \quad \operatorname{tg} \alpha \geq \frac{2}{3\mu}.$$

Ha ennél laposabban indítjuk az érmét, akkor rögtön elcsúszik. Ha az érme veszít az energiájából, akkor R és α csökken mindaddig, amíg (11)-ben az egyenlőség nem teljesül. Ebből azonban csak a legkisebb dőlésszöget határozhatjuk meg, a minimális görbületi sugár kiszámítása csak az energiavesztés (légellenállás, gördülő súrlódás) részletes leírásával együtt lehetséges.

Összefoglalva: A pénzérme elfordulásának jelenségét a (6) egyenlet írja le. Ha egy merev testre ható forgatónyomaték forgástengely irányú, akkor a szögsebesség nagysága változik (szöggyorsulás), ha merőleges a forgástengelyre, akkor a forgástengely iránya változik (precesszió jelensége).

(4 pont)

Megjegyzés. Ha az $R \gg r$ feltétel nem teljesül, akkor Ω nem hanyagolható el ω mellett. Ilyenkor Ω -t fel kell bontani ω -val párhuzamos és arra merőleges összetevőkre és ezeket I_1 , illetve I_2 -vel szorozva kapjuk meg az eredő impulzusnyomatékot. Mivel a szimmetriatengelyre vonatkoztatott I_1 és az egyik átmérőre vonatkoztatott I_2 tehetetlenségi nyomaték nem egyezik meg egymással, ezért $\mathbf{N}$ iránya más lesz, mint ω iránya, és a (7) egyenletet módosítani kell. Egyébként a számítás menete hasonló a fentiekhez.