

A kockára három erő hat:

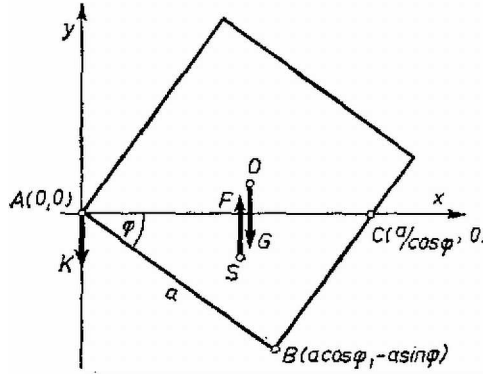
1. A kocka középpontjában függőlegesen lefelé mutató súlyerő:

$$G = a^3 \cdot \gamma \quad (\gamma \text{ a kocka fajsúlya});$$

2. a folyadékba merülő rész súlypontjában a függőlegesen felfelé irányuló archimedesi felhajtóerő:

$$F = a^3 \frac{\text{tg } \varphi}{2} \cdot 3\gamma \quad (3\gamma \text{ a folyadék fajsúlya});$$

3. a tengelynél fellépő K erő, amely a ferde helyzetbe kényszeríti a kockát.



Az egyensúly feltétele az, hogy a kockára ható *összes* erő eredője és a forgatónyomatékok összege nulla legyen. Ha a forgatónyomatékokat a tengelyre nézve írjuk fel, akkor a szög meghatározásához elegendő pusztán az utóbbi összefüggés figyelembevétele, mert ekkor az ismeretlen K erő forgatónyomatéka nulla.

A súlyerő karja:

$$k = a \cos 45^\circ \cos (45^\circ - \varphi).$$

A felhajtó erő karja egyenlő a vízbe merülő rész súlypontjának x koordinátájával, ha az x tengelyt a folyadék felszínével párhuzamosan vesszük fel:

$$s_x = \frac{a \cos \varphi + a / \cos \varphi}{3},$$

ahol azt használtuk fel, hogy az ABC háromszög súlypontjának helyvektorát az

$$\vec{s} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

összefüggés adja ($\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ a csúcsokba mutató helyvektorok).

Írjuk fel a forgatónyomatékok egyenlőségét:

$$a^3 \gamma \cdot a \cos 45^\circ \cos (45^\circ - \varphi) = a^3 \frac{\text{tg } \varphi}{2} 3\gamma \cdot a \frac{\cos \varphi + 1 / \cos \varphi}{3},$$

$$\cos(45^\circ - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \varphi + \sin \varphi), \text{tg } \varphi = \sin \varphi / \cos \varphi$$

felhasználásával, az egyenletet egyszerűsítve:

$$\cos \varphi + \sin \varphi = \sin \varphi + \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Ebből $\cos^3 \varphi = \sin \varphi$ (ill. $\cos^2 \varphi = \text{tg } \varphi$).

Négyzetre emelve és rendezve:

$$(\cos^2 \varphi)^3 + \cos^2 \varphi - 1 = 0 \quad (\text{ill. } \text{tg}^3 \varphi + \text{tg } \varphi - 1 = 0).$$

Az egyenletet grafikusán ábrázolva próbálgatással vagy a Cardano-képlettel megoldva egyetlen valós gyök adódik:

$$\text{tg } \varphi = \cos^2 \varphi \approx 0,6823.$$

Tehát a kocka lapja $\varphi = 34^\circ 18,5'$ szöget zár be a vízszintessel.

Pipek János (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A megoldók többsége elfeledkezett a tengelynél ébredő erőről és a szöget az így feltételezett „erőegyensúly” alapján számította. Bár ez a megoldás számértékieg csupán fél fokkal tér el a valóditól, az ilyen durva elvi hibát tartalmazó dolgozatokat mégsem lehetett elfogadni. Itt nem az egyenlet számszerű megoldásán volt a hangsúly.