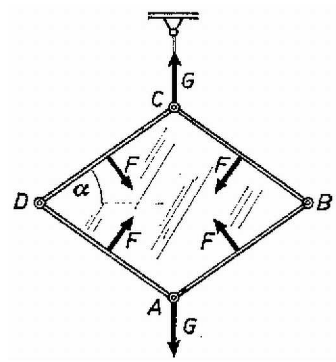
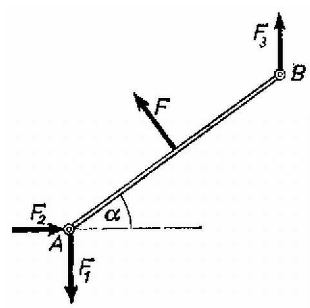
I. megoldás. A keret alakját egyértelműen jellemezhetjük a léceknek a vízszintestől mért α hajlásszögével. A keretre az 1. ábrán látható erők hatnak.



1. ábra

Mivel a folyadékhártyának két szabad felülete van, ezért $F = 2l\sigma$. Ha az egész keretre írjuk fel a külső erők és forgatónyomatékok egyensúlyát, azonosságot kapunk. Az F, G és α közti összefüggést csak akkor tudjuk meghatározni, ha kihasználjuk, hogy a keret egyes darabjai külön-külön is egyensúlyban vannak. Írjuk fel pl. az AB szakasz egyensúlyának feltételét! A rúd végpontjában a csuklók a 2. ábrán látható erőkkel nyomják a rudat.



2. ábra

Szimmetriaokokból a B pontban csak függőleges erő hat. Kapjuk tehát, hogy

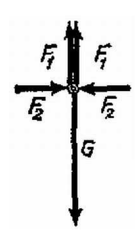
(1) $$F \cos \alpha + F_3 - F_1 = 0,$$

(2) $$F_2 - F \sin \alpha = 0.$$

A forgatónyomatékot írjuk fel a B pontra!

(3) $$F(l/2) - F_1 l \cos \alpha - F_2 l \sin \alpha = 0.$$

Ebben a három egyenletben három ismeretlen erő és az α szög szerepel. A hiányzó egyenletet az A pontban levő csuklóra ható erők egyensúlya szolgáltatja.



3. ábra

A szimmetrikus elrendezés miatt az AB és AD rudak reakcióerejének függőleges komponense azonos nagyságú (3. ábra):

(4) $$2F_1 - G = 0.$$

Az (1)–(4) egyenletrendszerből $\cos \alpha$-ra a következő egyenletet kapjuk:

(5) $$2F \cos^2 \alpha - G \cos \alpha - F = 0,$$

ahonnan

$$\cos\alpha = \frac{G}{4F} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{4F}\right)^2 + \frac{1}{2}}.$$

Mivel $0 < \alpha < 90°$, azért a négyzetgyököt pozitív előjellel kell vennünk. A $\cos\alpha < 1$ feltétel akkor teljesül, ha $G < F$. Amennyiben ez nem áll fenn, úgy nem jöhet létre egyensúly a fenti erők hatására. A keret egészen $\alpha = 90°$-ig deformálódik, ekkor a B és D csuklók érintkezésénél fellépő vízszintes erők állítják vissza az erőegyensúlyt. Hasonlóan $\alpha = 0°$-nál is létrejöhet az A és C csuklók közt fellépő erők hatására. Ennek feltételét, valamint az egyes egyensúlyi helyzetek stabilitását kényelmesebb az energiaviszonyok tanulmányozásával meghatározni.

Harmat Péter (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. Gimn., II. o.t.)

II. megoldás. Vizsgáljuk meg a rendszer energiáját az α szög függvényében. A keret által határolt terület $A = l^0 \sin\alpha$. Mivel a felületi feszültség egyik definíciója szerint a felületegységre eső energiát jelenti, ezért (figyelembe véve, a folyadékhártya mindkét felszínét) a felületi energia:

$$E_1 = 2A\,\sigma.$$

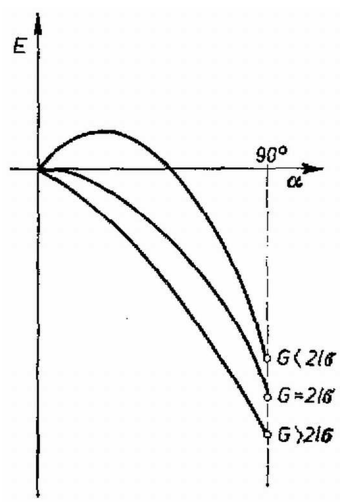
A G súlyú test helyzeti energiája a C ponthoz viszonyítva

$$E_2 = -2l(\sin\alpha)G.$$

A teljes energia

$$E = 2l^2\sigma\,\sin 2\alpha - 2l(\sin\alpha)G.$$

Ha ábrázoljuk E-t a függvényében, akkor $G \lesseqgtr 2l\,\sigma$ eseteknek megfelelően 3 különböző jellegű görbét kapunk (4. ábra).



4. ábra

Stabil egyensúly ott alakul ki, ahol az energiának minimuma van. Ez mindig teljesül az $\alpha = 90°$-os szögnél, valamint $G < 2l\,\sigma$ esetben $\alpha = 0°$-nál is. Ahol az energiának maximuma van, ott a rendszer instabil egyensúlyi helyzete található. A $G > 2l\,\sigma$ esetben ez sohasem teljesül, a $G \le 2l\,\sigma$ esetben pedig valamilyen α szögnél. Ez a szög a differenciálszámítás segítségével határozható meg, mivel α_0 értéknél

$$E' = 4l^2\sigma\,\cos 2\alpha_0 - 2lG\,\cos\alpha_0 = 0.$$

Ebből egyszerű átalakításokkal megkaphatjuk az (5) egyenletet.
Határesetben, ha $G = 2l\,\sigma$, akkor $\alpha_0 = 0°$.

Klebniezki József (Szeged, Ságvári E. Gimn., III. o. t.)