

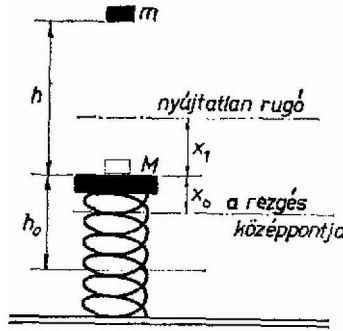
I. megoldás. Ha a rugó felső végén nincs M tömeg, akkor az egész folyamatra alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradásának tételét. Mivel egy, nyugalmi helyzetéhez viszonyítva h_0 -al megnyújtott vagy összenyomott rugó energiája $(1/2)Dh_0^2$, azért

$$(1/2)mv_0^2 + mg(h + h_0) = (1/2)Dh_0^2,$$

tehát

$$v_0 = \sqrt{\frac{D}{m}h_0^2 - 2g(h + h_0)}$$

függőleges kezdősebességgel kell elhajítani m -et, hogy a rugó h_0 értékkel nyomja össze. Numerikus adatokkal $v_0 \approx 12,6$ m/s.



Amennyiben a rugón M tömegű rugalmatlan teher nyugszik, akkor az m tömeg ezzel rugalmatlanul ütközik, tehát mechanikai energia hővé alakul. A mechanikai energia megmaradásának tételét így nem alkalmazhatjuk az egész folyamatra. Az ütközésig terjedő folyamatra

$$(1/2)mv_0^2 + mgh = (1/2)mv^2, \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2gh},$$

ahol v a test ütközés előtti sebessége.

m tömeg M -mel rugalmatlanul ütközik, az ütközés utáni közös c sebesség az impulzusmegmaradás tételéből

$$c = \frac{mv}{m + M}.$$

Ütközés után a tömegek mozgási energiája $E_m = (1/2)(m + M)c^2$, a helyzeti energia megváltozása $E_h = (m + M)gh_0$. A rugó már az ütközés pillanatában is rendelkezett helyzeti energiával, mivel M súlyereje $x_1 = Mg/D$ szakasszal nyomta össze. Így energiájának megváltozása $E_r = (1/2)D(x_1 + h_0)^2 - (1/2)Dx_1^2$.

A mechanikai energia megmaradásának tétele

$$E_m + E_h = E_r,$$

$$(1/2)(m + M)c^2 + (m + M)gh_0 = (1/2)D(x_1 + h_0)^2 - (1/2)Dx_1^2.$$

Behelyettesítve c és x_1 értékét

$$\frac{1}{2} \frac{m^2}{m + M} (v_0^2 + 2gh) + (m + M)gh_0 = \frac{1}{2}D \left[\left(\frac{Mg}{D} + h_0 \right)^2 - \left(\frac{Mg}{D} \right)^2 \right].$$

Innen

$$v_0 = \sqrt{D \frac{m + M}{m^2} h_0^2 - 2 \frac{m + M}{m^2} gh_0 - 2gh}.$$

Numerikus értékekkel $v_0 \approx 20,1$ m/s.

v_0 iránya egyaránt mutathat felfelé és lefelé, hiszen felfelé dobva el az m tömeget az eldobás helyén lefelé is v_0 sebességgel halad keresztül.

v_0 kifejezésének csak akkor van értelme, ha a négyzetgyök alatt nemnegatív szám áll, vagyis

$$D \frac{m + M}{m^2} h_0^2 - 2 \frac{m + M}{m} gh_0 - 2gh \geq 0.$$

Ha ez teljesül, akkor minden v_0 esetén a rugó h_0 -nál jobban összenyomódik. Az előbbi egyenlőtlenségből a rugó minimáliss összenyomódása

$$h_0 \geq \left(g + \sqrt{g^2 + 2 \frac{Dgh}{m + M}} \right) \frac{m}{D} \approx 0,06 \text{ m}.$$

II. megoldás. Foglalkozunk az általánosabb esettel, az $M = 0$ -nak megfelelő speciális eset szolgáltatja az első eset megoldását.

Az m tömeg ütközés előtti sebessége a $v = v_0 + gt$ és $h = v_0 t + (g/2)t^2$ összefüggésekből t kiküszöbölésével $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$. m ekkora sebességgel rugalmatlanul ütközik az álló M -be, így ütközés utáni sebességük

$$c = \frac{m}{m+M} \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Az ütközés után a mozgás egy harmonikus rezgőmozgás részének tekinthető, melynek középpontja az ütközés helye alatt $x_0 = mg/D$ távolsággal van, hiszen m súlyereje meg ennyivel nyomja össze a rugót. A rezgés amplitúdója $A = h_0 - x_0$, körfrekvenciája $\omega = \sqrt{\frac{D}{m+M}}$. A rezgés kitérése és sebessége idő függvényében

$$x = A \sin(\omega t + \varphi), \quad v = A\omega \cos(\omega t + \varphi).$$

Az m tömeggel való ütközés helyén

$$x_0 = A \sin(\omega t_0 + \varphi), \quad c = A\omega \cos(\omega t_0 + \varphi),$$

innen

$$\sin(\omega t_0 + \varphi) = x_0/A, \quad \cos(\omega t_0 + \varphi) = c/A\omega.$$

Mivel $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, ezért

$$\left(\frac{x_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{c}{A\omega}\right)^2 = 1,$$

ahonnan

$$c^2 = \omega^2(A^2 - x_0^2) = \frac{D}{m+M} \left[\left(h_0 - \frac{mg}{D}\right)^2 - \left(\frac{mg}{D}\right)^2 \right].$$

Behelyettesítve c értékét

$$\frac{m^2}{(m+M)^2} (v_0^2 + 2gh) = \frac{D}{m+M} \left[\left(h_0 - \frac{mg}{D}\right)^2 - \left(\frac{mg}{D}\right)^2 \right],$$

ebből

$$v_0 = \sqrt{D \frac{m+M}{m^2} h_0^2 - 2 \frac{m+M}{m} gh_0 - 2gh},$$

ami megegyezik az első megoldás eredményével.