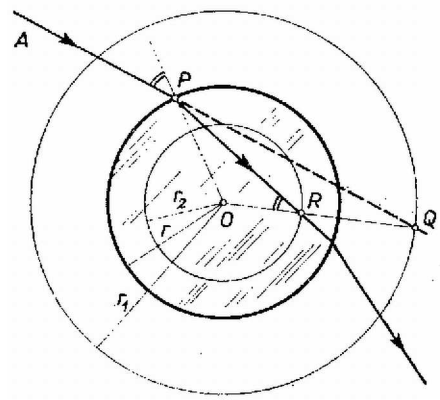
A beeső fénysugár és a beesési merőleges síkja mindig tartalmazza a gömb középpontját, ezért a gömböt r sugarú körlappal helyettesítve síkban vizsgálhatjuk a problémát.

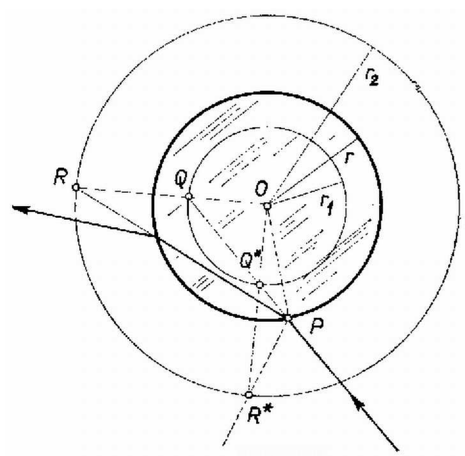


1. ábra

Vegyük észre, hogy a POR és POQ háromszögek hasonlók, mert megegyezik a két oldal aránya és a közbezárt szög. Ebből következik, hogy az $ORP\sphericalangle$ egyenlő a beesési szöggel. Ugyanennek a háromszögnek a másik szöge, $OPR\sphericalangle$ adja a törési szöget. A szinusz tétel alapján:

$$\frac{\sin ORP\sphericalangle}{\sin OPR\sphericalangle}=\frac{OP}{OR}=n.$$

Mivel a Snellius–Descartes-törvény szerint pontosan ilyen összefüggés van a beesési és a törési szögek között, ezért $n\geq 1$ esetén (1. ábra) valóban helyes a fenti, eredetileg Weierstrasstól származó szerkesztés.



2. ábra

$n<1$ esetén (2. ábra) szintén felvehető az r_1 és r_2 sugarú kör (most $r_1<r<r_2$). Ekkor, ha a beeső fénysugár meghosszabbítása metszi az r_1 sugarú kört, a ***távolabbi*** metszéspontot Q-val jelölve, az OQ egyenes megadja R-t, és a PR egyenesnek az r sugarú gömbbe eső része pedig a megtört sugár útját. A bizonyítás ugyanazon háromszögek hasonlóságán alapul, mint az $n>1$ esetben.

$n\geq 1$ esetén a szerkesztés mindig elvégezhető, $n<1$ esetén azonban csak akkor, ha a beeső fénysugár legalább érinti az r_1 sugarú kört. Ennél nagyobb beesési szögek esetén teljes visszaverődés lép fel.

Forgó Ignác (Győr, Mayer L. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés: $n<1$ esetén nyilvánvaló, hogy a P-hez közelebbi Q^* pont nem felelhet meg, ugyanis ekkora törési szög 90°-nál nagyobbnak adódik. Ennek ellenére a bizonyítást ekkor is el lehet végezni, és az adódik, hogy

$$\frac{\sin OR^*P\sphericalangle}{\sin OPR^*\sphericalangle}=n.$$

Vagyis most is teljesülni látszik a Snellius–Descartes-törvény. Ennek azonban pusztán matematikai oka van, mert a törési szög mellékszögének szinusza megegyezik magának a szögnek a szinuszával. Ezért a Snellius–Descartes-törvény precíz megfogalmazásába be kell venni azt az egyébként magától értetődő feltételt, hogy mind a törési, mind pedig a beesési szög hegyesszög. Minthogy a Q^* esetén a törési szög mellékszögét kapjuk, ez mindjárt rámutat azon megoldók állításának a tarthatatlanságára, akik szerint ez a második megoldás „a fénysugár visszavert részének az irányát” adja, hiszen ez a „visszaverődési szög”, mivel éppen a valódi törési szöggel egyenlő, mindig nagyobb a beesési szögnél.