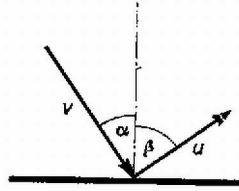


A golyó a lejtőn forgás nélkül egyenletesen gyorsul és h függőleges elmozdulás után $v = 2\sqrt{gh}$ sebességgel érkezik a lejtő aljába. Itt a lejtővel és a fallal egyszerre érintkezik, ezekkel bonyolult kölcsönhatásba lép és végül valamilyen irányba kirepül a lejtő és a fal szögletéből. A továbbiakban feltesszük, hogy ez a bonyolult kölcsönhatás lebontható független ütközések sorozatára, vagyis a golyó úgy verődik vissza a falról, mintha a lejtő nem lenne ott, majd az így szerzett sebességgel a lejtőnek ütközik stb. (A feltevés jogosságát ellenőrizhetjük egy olyan számítással, melyben a golyót erős rugókkal összekapcsolt tömegpontoknak tekintjük, és az ütközés lefolyását pontról pontra nyomon követjük.)



1. ábra

Határozzuk meg az egyes ütközések jellemző adatait! Ha egy v sebességű golyó α szöggel érkezik egy visszaverő felülethez (1. ábra) és az ütközési szám ε , akkor a β visszaverődési szöget és az ütközés utáni u sebességet a következő jellemzi. A felülettel párhuzamos sebességkomponens változatlan marad:

$$v \sin \alpha = u \sin \beta.$$

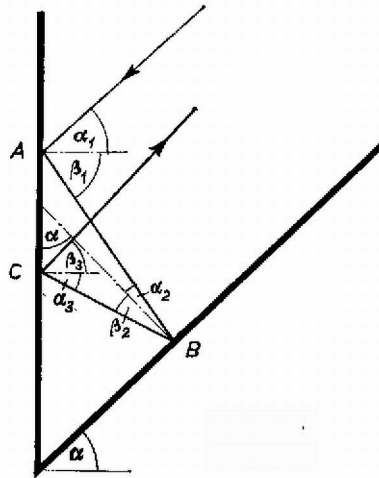
A felületre merőleges komponens ε -szorosára változik:

$$\varepsilon v \cos \alpha = u \cos \beta.$$

A fenti egyenletekből látható, hogy

$$(1) \quad \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta.$$

A megváltozott sebesség, $u = v \sqrt{\sin^2 \alpha + \varepsilon^2 \cos^2 \alpha}$ láthatóan függ v -n és ε -on kívül a beesési szögtől is.



2. ábra

A fentiek alapján az ütközés lefolyása a 2. ábrán láthatóhoz hasonló. A golyó felváltva ütközik a fallal és a lejtővel mindaddig, amíg valamelyik ütközés utáni sebesség vízszintessel bezárt szöge α és 90° közé nem esik. Ezután a ferde hajítás egyenletei szabják meg a golyó mozgását. Az egyes ütközések közti szakaszok (pl. AB , BC) nem a golyó tényleges elmozdulását, hanem csak a sebesség irányát jelzik. Mindegyik ütközésnél érvényes az (1) összefüggés, tehát

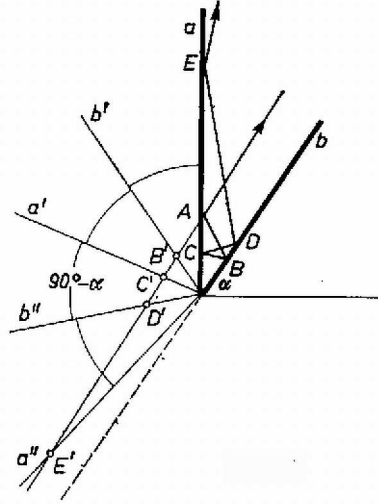
$$(2) \quad \operatorname{tg} \beta_i = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{tg} \alpha_i,$$

valamint a visszaverődés szöge és a következő ütközés beesési szöge közti geometriai feltétel:

$$(3) \quad \alpha_{i+1} = \alpha_i + \beta - 90^\circ.$$

Ezekből az egyenletekből $\alpha_1 = \alpha$ kezdeti feltétel felhasználásával sorra kiszámíthatók az ütközési szögek.

Ha $\varepsilon = 1$, akkor (2) alapján $\beta_i = \alpha_i$. Ilyenkor egyszerűbben is megkaphatjuk az ütközések számát és a kirepülés szögét, ha felismerjük az analógiát a síktükrön visszaverődő fénysugár és a feladatban szereplő golyó mozgása között. Tükrözzük a fal a síkjára a lejtő b síkját, majd a b' tükrökre az a síkot stb. (3. ábra).



3. ábra

A tükörképeken az A, B', C', D' pontok egy egyenesen helyezkednek el.

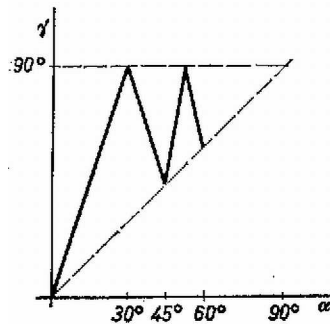
Vezessük be valamely x szám egész részének jelölésére az $[x]$ jelet! Az ábráról leolvashatjuk, hogy ha $n = \left[\frac{180^\circ}{90^\circ - \alpha} \right]$ páros szám, akkor a kirepülő golyó a lejtő síkjával

$$\left[180^\circ - \frac{180^\circ}{90^\circ - \alpha} \right] (90^\circ - \alpha),$$

páratlan n -re pedig

$$\left[\frac{180^\circ}{90^\circ - \alpha} \right] (90^\circ - \alpha) - 90^\circ - \alpha$$

szöveget zár be. Ha ábrázoljuk a kirepülő golyó sebességének vízszintessel bezárt szögét α függvényében, akkor a 4. ábrán látható grafikont kapjuk.



4. ábra

Valahányszor $\frac{180^\circ}{90^\circ - \alpha}$ egész szám, vagyis

$$\alpha = 90^\circ - \frac{180^\circ}{m}, \quad m = 3, 4, 5, \dots,$$

akkor a függvénynek töréspontjai vannak, ezekben a pontokban felváltva veszi fel a 90° és az α értéket. A kirepülés sebessége mindig megegyezik v -vel.

Ha $\varepsilon \neq 1$, akkor a fenti gondolatmenet nem alkalmazható, hanem (2) és (3)-ból kell számolni az ütközési szögeket. A rugalmas ütközés tárgyalásánál látott kritikus szögek megfelelőit itt is kiszámíthatjuk. A két és a három ütközést elválasztó határesetben a golyó a fallal párhuzamosan függőlegesen felfelé repül ki. Ez annak felel meg, hogy $\alpha_3 = 90^\circ$. Ez viszont

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \varepsilon + 1}}$$

esetben teljesül. $\varepsilon = 1$ esetben visszkapjuk a már meghatározott $\alpha = 30^\circ$ értéket, $\varepsilon = 0,5$ -re pedig $\alpha = 28,1^\circ$ -ot kapunk. Hasonló módon számítható, hogy $\alpha = 41,8^\circ$ -nál a golyó háromszor ütközik és a lejtővel párhuzamosan verődik vissza.

Klebniczki József (Szeged, Ságvári E. Gimn., III. o. t.)
és *Petz Dénes* (Bp., Veres Pálné Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Miután a golyó elhagyta a szögletet, bizonyos magasságig felrepül. Ez a magasság még $\varepsilon = 1$ esetben sem egyezik meg az indítási magassággal (mint azt több megoldó az energiatételre való hivatkozással állította, mert a golyónak a pálya tetőpontján mozgási energiája is van) (kivéve azt a két speciális esetet, mikor a golyó valamelyik felülettel párhuzamosan verődik vissza).

2. Abszolút rugalmas golyó esetén 45° -nál kisebb hajlásszögeknél egyszer ütközik a lejtővel és ezután ferde hajítás jön létre. 45° -nál pontosan visszacsúszik a lejtőn, 45° -nál nagyobb szögeknél többszöri visszaverődés után repül ismét ki a szögletből. Ha súrlódás is van, vagy nem abszolút rugalmas a golyó, már 45° -nál kevéssel nagyobb szögek esetén is, „beragad” a szögletbe.