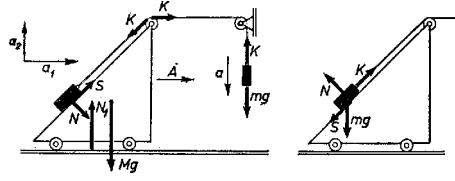


Vizsgáljuk meg, hogy milyen erők hatnak az egyes testekre (1. ábra).



1. ábra

A kötélen lógó testre hat a súlyerő (mg), a kötélerő (K), a lejtő hatása: N nyomóerő és S súrlódási erő, feltételezve, hogy a test fölfelé mozog a lejtőn. Az ékre ható erők: a súlyerő (Mg), a talaj nyomóereje (N_1), a csigánál fellépő két kötélerő (K) és az m tömegű test hatása (N és S). (Az ábra az áttekinthetőség kedvéért két részből áll.)

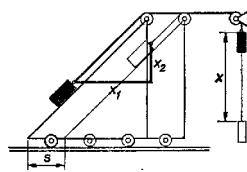
A kötélen lógó test gyorsulása legyen a , az éké A . A harmadik test gyorsulásának sem a nagysága, sem az iránya nem ismert. Jelöljük ezért a gyorsulás vízszintes komponensét a_1 -gyel, függőleges komponensét a_2 -vel. A pozitív irányok az 1. ábrán adóttak.

A három testre öt mozgásegyenletet írhatunk fel:

$$\begin{aligned} (1) \quad & ma = mg - K, \\ (2) \quad & MA = K - \frac{K}{\sqrt{2}} + \frac{S}{\sqrt{2}} + \frac{N}{\sqrt{2}}, \\ (3) \quad & 0 = Mg - N_1 + \frac{N}{\sqrt{2}} - \frac{S}{\sqrt{2}} + \frac{K}{\sqrt{2}}, \\ (4) \quad & ma_1 = \frac{K}{\sqrt{2}} - \frac{N}{\sqrt{2}} - \frac{S}{\sqrt{2}}, \\ (5) \quad & ma_2 = -mg - \frac{S}{\sqrt{2}} + \frac{K}{\sqrt{2}} + \frac{N}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(Az egyszerűség kedvéért $\sin 45^\circ$ és $\cos 45^\circ$ helyett $1/\sqrt{2}$ -t írtunk.)

A gyorsulások azonban nem függetlenek egymástól: a közöttük levő összefüggések kifejezik, hogy a kötélnyújthatatlan és az egyik m tömegű test végig a lejtő lapján marad. A 2. ábrán lerajzoltuk a testeket az indulás pillanatában és t idővel később.



2. ábra

A testek elmozdulásait az ábra szerint x , s , x_1 és x_2 -vel jelöljük. A kötélnyújtatlanság miatt

$$(6) \quad x = s + x_2\sqrt{2},$$

a test az ék felületén marad:

$$(7) \quad x_1 - s = x_2.$$

Az

$$(8) \quad x = (1/2)at^2, \quad s = (1/2)At^2, \quad x_1 = (1/2)a_1t^2, \quad x_2 = (1/2)a_2t^2$$

összefüggéseket behelyettesítve megkapjuk a kényszer egyenleteket:

$$(9) \quad a = A + a_2\sqrt{2},$$

$$(10) \quad a_1 - A = a_2.$$

Amennyiben a test valóban felfelé mozog a lejtőn, a súrlódási erő

$$(11) \quad S = \mu N.$$

Az (1), (2), (3), (4), (5), (9), (10) és (11) egyenletekből álló egyenletrendszer nyolc ismeretlent tartalmaz, megoldható. Az egyetlen gyök, amire szükségünk van

$$(12) \quad A = g \frac{3 + \mu(1 + \sqrt{2})}{5 - 2\sqrt{2} + 4M/m + \mu(1 + \sqrt{2})}.$$

Az egyenletrendszer megoldásának utolsó előtti lépését még fel fogjuk használni:

$$(13) \quad A(2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}\mu - 4a = g(-2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}\mu).$$

Kérdéses azonban, hogy feltételezéseink valóban teljesülnek-e. A mozgás a tömegektől és a sűrűlási együttthatóktól függően háromféleképpen történhet: a lejtőn levő test felfelé mozog (ebben az esetben oldottuk meg a feladatot); a test lefelé mozog; a lejtővel összetapad.

Vizsgáljuk meg a három esetet elválasztó határokat. Az, hogy a test az éken lefelé vagy felfelé mozog, a sűrűlási együttthatótól független. Nagy sűrűlási együtttható esetén a sűrűlás legfeljebb megállítja a relatív mozgást, de ellenkező irányút nem hozhat létre. Így ebből a szempontból $\mu = 0$ -nál vizsgáljuk a mozgást. A határeset (a két test együtt mozog) az $A = a$ összefüggéssel jellemezhető. Ezt és $\mu = 0$ -t a (12) és (13) összefüggésekbe helyettesítve megkaphatjuk a határeset feltételét: $M/m = 1 + 2\sqrt{2} = 3,83$. Ha tehát $M/m > 3,83$, a test felfelé mozoghat az éken, ha $M/m < 3,83$, lefelé.

Az $M/m > 3,83$ esetben érvényes a (12) és (13) összefüggés. Ha μ elég nagy (nevezzük a határesetben μ_1 -nek), a relatív mozgás megszűnik, a (11) egyenlet érvényét veszti, helyére az $A = a$ egyenlőség kerül. Határesetben, ha $\mu = \mu_1$, még érvényes a (12) és (13) egyenlet, de már az $A = a$ is teljesül. Innen megkaphatjuk μ_1 értékét:

$$(14) \quad \mu_1 = \sqrt{2} - 1 - \frac{2}{1 + M/m}.$$

Hasonlóan járhatunk el az $M/m < 3,83$ esetben. Nevezzük el a kritikus sűrűlási együttthatót μ_2 -nek. A (12) és (13) egyenletekbe μ helyett írjunk mindenütt $-\mu$ -t, hiszen a sűrűlási erő előjelet vált. A kritikus sűrűlási együttthatóra

$$(15) \quad \mu_2 = -\sqrt{2} + 1 + \frac{2}{1 + M/m}$$

adódik. Az ék gyorsulása ebben az esetben (12) alapján

$$(16) \quad A = g \frac{3 - \mu(1 + \sqrt{2})}{5 - 2\sqrt{2} + 4M/m - \mu(1 + \sqrt{2})}.$$

Amennyiben az ék és a rajta levő test összetapad, azokat egyetlen merev testnek tekinthetjük, vagyis az ék gyorsulása

$$(17) \quad A = g \frac{m}{M + 2m}.$$

Összefoglalva megoldásunkat, tetszőleges szám adatok esetén

ha $M/m \geq 3,83$ és $\mu \leq \mu_1$, akkor a (12),

ha $M/m \geq 3,83$ és $\mu \geq \mu_1$, akkor a (17),

ha $M/m \leq 3,83$ és $\mu \leq \mu_2$, akkor a (16),

ha $M/m \leq 3,83$ és $\mu \geq \mu_2$, akkor a (17) képletből kell A értékét kiszámítani.

Számadatainkkal $M/m = 10 > 3,83$, (14) alapján $\mu_1 = 0,23$. Így ha $\mu = 0,1 < \mu_1$, a (12) képletből $A = 0,076 \text{ g}$, ha $\mu = 0,4 > \mu_1$, a (17) képletből $A = 0,083 \text{ g}$.

Komornik Vilmos (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)
Sailer Kornél (Ózd, József A. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján