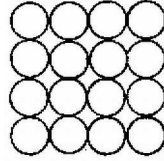


A ϱ átlagsűrűség meghatározása visszavezethető az edényben levő golyók számának meghatározására. Ha ugyanis a ϱ_0 sűrűségű golyókból N darab fér el a V térfogatú edényben, akkor

$$(1) \quad \frac{4R^2\pi}{3} N \varrho_0 = \varrho V.$$

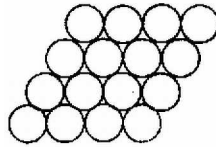
Az edényben elhelyezhető golyók száma függ a golyók térbeli elrendeződésétől. Három jellegzetes elrendezéssel foglalkozunk.

I. Minden golyó 6 másikkal érintkezik. Az egy rétegben elhelyezkedő golyók középpontjai négyzethálót alkotnak és a következő rétegek golyói is pontosan e fölött helyezkednek el (1. ábra).



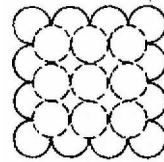
1. ábra

II. Minden golyónak 8 szomszédja van. Az egy réteghez tartozó golyók középpontjai rombuszhálót alkotnak és a következő réteg ismét pontosan az alatta levő fölé kerül (2. ábra).



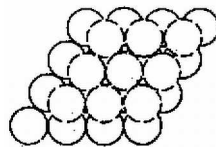
2. ábra

III. Minden golyó 12 másikkal érintkezik. Az egyes rétegek négyzethálós szerkezetűek, de a következő réteg golyói a szaggatott vonallal megjelölt helyekre kerülnek (3. ábra).



3. ábra

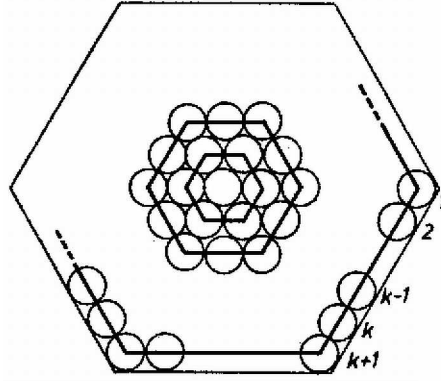
Ugyanennek az elrendezésnek másik nézete a 4. ábrán látható.



4. ábra

A fenti három elrendezés tetszőleges alakú edény középső részében megvalósítható, az edény falánál azonban a szabályos elrendeződés (az edény alakjától függő mértékben) elromlik.

Határozzuk meg az m magasságú hatszög alapú hasámban elhelyezhető golyók számát! A hatszög oldalélét az egyszerűség kedvéért vegyük $(2k + \frac{2}{\sqrt{3}}) \cdot R$ -nek, ekkor ugyanis egy oldalél mentén pontosan $k + 1$ golyó fér el.



5. ábra

Számoljuk össze az 5. ábrán látható golyókat, melyek egy réteget alkotnak! A középponttól kiindulva hatszögenként leszámolhatjuk a golyókat:

$$n = 1 + 6 + 12 + \dots + 6k = 1 + 6 \frac{k(k+1)}{2} = 3k^2 + 3k + 1.$$

Ha a II. elrendezést valósítjuk meg, akkor ugyanilyen rétegek ismétlődnek $\left[\frac{m}{2R} \right]$ -szer. (Az $[x]$ jelölés az x szám egész részét jelenti.) Az edény térfogata

$$V = \left(2k + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3m = 6\sqrt{3} \left(k + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 R^2 m.$$

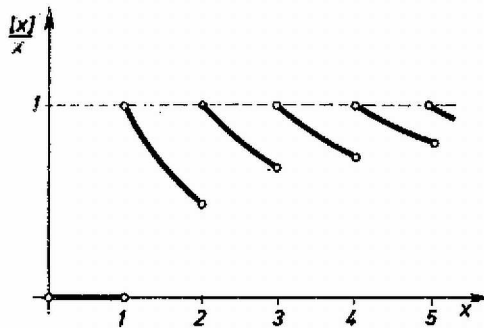
Az edényben levő golyók száma

$N = (3k^2 + 3k + 1) \left[\frac{m}{2R} \right]$, így (1) felhasználásával

$$(2) \quad \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{\frac{4R^3\pi}{3}(3k^2 + 3k + 1) \left[\frac{m}{2R} \right]}{6\sqrt{3} \left(k + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 R^2 m} = \frac{1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{3k^2}}{\left(1 + \frac{1}{k\sqrt{3}} \right)^2} \cdot \frac{\left[\frac{m}{2R} \right]}{\frac{m}{2R}} \cdot \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

A fenti eredmény három tényezőjének külön-külön szemléletes jelentése van. Az első tört értéke csak k -tól függ, és azt fejezi ki, hogy a hasáb palástjánál nem olyan jó a térkitöltés, mint a test belsejében. A tört értéke egynél mindig kisebb, de tetszés szerinti előírt pontossággal megközelíti azt, ha k elég nagy (pl: $k = 1, 2, 3, 100$ -ra a tört értéke 0,93; 0,95; 0,96; 0,998).

A második tényező a sűrűségnek a magasságtól való függését írja le állandó k mellett, vagyis a d) kérdésre adja meg a választ. A 6. ábrán látható, hogy az $\frac{[x]}{x}$ függvény értéke legfeljebb 1 lehet.



6. ábra

Ha $m \gg R$, vagyis ha sok réteg fér el az edényben, akkor elhanyagolhatjuk a legfelső réteg felett esetleg szabadon maradó helyet az edény térfogatához képest, azaz $\frac{2R}{m} \left[\frac{m}{2R} \right]$ egynek vehető.

A harmadik tényező jellemzi a térkitöltés jóságát. Ha $k \gg 1$ és $m \gg R$, akkor

$$(3) \quad \varrho = \varrho_0 \cdot \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Vizsgáljuk meg a III. elrendezést! A 4. ábrának megfelelően elhelyezett golyóknál minden második rétegbe csak $3k^2$ golyó fér el, viszont a rétegek távolsága egy $2R$ oldalélű tetraéder magassága, azaz $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R$. Az előző számoláshoz hasonlóan

$$(4) \quad \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{\frac{4R^3\pi}{3} \cdot \frac{(3k^2 + 3k + 1) + 3k^2}{2} \left\{ \left\lfloor \frac{m - 2R}{2\sqrt{2}R} \sqrt{3} \right\rfloor + 1 \right\}}{6\sqrt{3} \left(k + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 R^2 m}.$$

Ha $m \gg R$ és $k \gg 1$, akkor

$$(5) \quad \varrho = \varrho_0 \cdot \frac{\pi}{6} \sqrt{2}.$$

Vizsgáljuk meg az I. elrendezést négyzet alapú hasábra! Egy rétegbe k^2 golyó fér el, a rétegek száma $\left\lfloor \frac{m}{2R} \right\rfloor$ az edény térfogata $(2kR)^2 m$, tehát

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{\frac{4R^3\pi}{3} k^2 \cdot \left\lfloor \frac{m}{2R} \right\rfloor}{(2kR)^2 m} = \frac{\left\lfloor \frac{m}{2R} \right\rfloor}{\frac{m}{2R}} \cdot \frac{\pi}{6}.$$

Érdekes, hogy most k -től független a sűrűségek aránya. Ennek az az oka, hogy az edény alakja jól illeszkedik az elrendeződés négyzetes szimmetriájához és így a felületen sem rosszabb a térkitöltés, mint az edény belsejében. Hatszög alapú hasábra kiszámolva ugyanezt, ismét megjelenne egy k -től függő egynél kisebb szorzótényező.

A fentiek alapján már valamennyi kérdésre választ tudunk adni.

a) Ha a golyók méretét n -ed részére csökkentjük, akkor valamennyi képletben k helyére $n \cdot k$ -t, R helyébe $\frac{R}{n}$ -t kell írni. Az átlagsűrűség változását a II. elrendezésnél (2) írja le. A golyók méretét csökkentve belátható, hogy az első tényező biztosan növekszik. A második tényező sem csökkenhet, hiszen érvényes az $[nx] \geq n[x]$ egyenlőtlenség. Tehát az átlagsűrűség növekszik, de ez a növekedés $k \gg 1$, $m \gg R$ esetben elhanyagolhatóan kicsi.

b) A fém sűrűségét k , m értékének, valamint az elrendeződés jellegének ismeretében lehet meghatározni. Ha $k \gg 1$ és $m \gg R$, akkor a három elrendeződésnél (az edény alakjától függetlenül) rendre

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad \varrho_0 &= \frac{6}{\pi} \varrho = 13 \text{ g/cm}^3; & \text{II.} \quad \varrho_0 &= \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \varrho = 11,2 \text{ g/cm}^3; \\ \text{III.} \quad \varrho_0 &= \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \varrho = 9,2 \text{ g/cm}^3. \end{aligned}$$

c) Ha $k \gg 1$ és $m \gg R$, akkor a térkitöltés jóságát a $\pi/6$, $(\pi/3)\sqrt{3}$ és $(\pi/6)\sqrt{2}$ számok jellemzik. A legjobb térkitöltést a III. elrendezés adja. Ha a golyók száma kicsi, akkor a felület közelében található hibák hatása jelentős és a legkedvezőbb térkitöltést az edény alakjához legjobban illeszkedő elrendezés adja. Ez hatszög alapú hasábnál a II., négyzet alapú hasábnál az I. elrendezés. Azt a k értéket, amelyiknél a legsűrűbb térkitöltés elrendeződés-változást igényel, a (2), illetve (4) típusú kifejezésekből lehet meghatározni.

Megjegyzés. A kitűzésben $(2k + 1)R$ oldalélű hatszög szerepelt. Ezt nem lehet szorosan kirakni golyókkal, ezért számoltunk más értékkel. Az ebből adódó eltérések a megoldás lényegét nem érintik és így az elért pontokat nem változtatták meg.