

Tegyük fel, hogy a k -edik hozzáérintés után q_k , töltés van a C_2 kapacitású gömbön. Mivel a párhuzamosan kapcsolt C_1 és C_2 gömbökön az össztöltés a kapacitások arányában oszlik el, ezért a $(k+1)$ -edik hozzáérintés után C_2 töltése:

$$(1) \quad q_{k+1} = \alpha(Q + q_k), \quad \text{ahol} \quad \alpha = \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

Mivel az első hozzáérintés előtt $q_0 = 0$ volt a C_2 -n, azért az első hozzáérintés után az (1) rekurziós képlet alapján: $q_1 = \alpha Q$, a második után $q_2 = (\alpha + \alpha^2)Q \dots$ stb. töltés lesz a C_2 gömbön.

Ebből adódik a sejtés, hogy

$$(2) \quad q_k = (\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^k) Q = \frac{\alpha^{k+1} - \alpha}{\alpha - 1} Q$$

a mértani sor összegzési szabályai szerint. Mivel láttuk, hogy $k = 1$ -re igaz az állítás, ezért a teljes indukciós bizonyítás elvégzéséhez azt kell még megmutatni, hogy a (2) explicit képlet k -ra való helyességéből következik a $(k+1)$ -re való helyessége is. Ez valóban így van, mert (1) alapján

$$q_{k+1} = \alpha(Q + q_k) = \alpha \left(1 + \frac{\alpha^{k+1} - \alpha}{\alpha - 1} \right) Q = \frac{\alpha^{k+2} - \alpha}{\alpha - 1} Q.$$

Ha $nQ = q_k$, vagyis

$$n = \frac{\alpha^{k+1} - \alpha}{\alpha},$$

ahonnan

$$(3) \quad k = \frac{\lg \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} n + 1 \right)}{\lg \alpha} = \frac{\lg \left(1 - \frac{C_1}{C_2} n \right)}{\lg \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} \right)},$$

akkor a $[k] + 1$ -edik hozzáérintés után a C_2 kapacitású gömb töltése már biztosan nagyobb lesz nQ -nál. (Persze szerencsés esetben, ha k egész szám, akkor éppen k hozzáérintéssel érhető el a kívánt töltésmennyiség.)

A (2) képlet alapján látható, hogy bár minden lépésben növekszik egy kicsit ($\alpha^k Q$ -val) a C_2 töltése, mivel C_2 feszültsége sohasem lehet nagyobb $U = Q/C_1$ -nél, ezért ez a növekedés nem haladhatja túl a $g_{\max} = U \cdot C_2 = Q \frac{C_2}{C_1}$ értéket, vagyis n értéke nem lehet nagyobb C_2/C_1 -nél. (Matematikailag jól jelzi ezt a tényt az is, hogy $n \geq C_2/C_1$ esetén értelmetlenné válik a (3) képletbeli logaritmus függvény.) Az n minimumaként $n = 0$ -t vehetjük, vagyis az első összeérintés előtti állapotot, de jó megoldásnak tekintettük azokat is, ahol $n = \alpha = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ -t adtak meg.

Iglói Ferenc (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.)