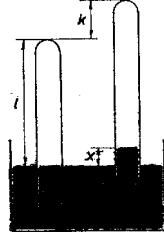


A higany az emelés előtt azonos szinten van az üvegcsővön belül és kívül. Ekkor a külső levegő p nyomása egyenlő az üvegcsőben levő levegő nyomásával. Jelöljük x -szel a higanyoszlop magasságát a csőben az emelés után!



k nagyságú emelés után írjuk fel a Boyle–Mariotte törvényt az üvegcsőben levő levegőre:

$$(1) \quad pAl = p_1 A(l + k - x).$$

(Itt A az üvegcső keresztmetszete, p_1 pedig a belső levegő nyomása az emelés után.)

Az emelés után az üvegcsőben levő higanyoszlop és az üvegcsőben levő levegő nyomása tart egyensúlyt a külső légnyomással. Ha nyomásegységnek a Hgmm-t választjuk, akkor a nyomások egyensúlya a következő alakú:

$$(2) \quad p = p_1 + x.$$

Ebből p_1 egyszerűen kifejezhető. Behelyettesítjük (1)-be, így másodfokú egyenlethez jutunk:

$$x^2 - x(p + k + l) + pk = 0.$$

Két megoldás van:

$$x = \frac{(p + k + l) \pm \sqrt{(p + k + l)^2 - 4pk}}{2}.$$

A + jelnek megfelelő megoldásnak nincsen fizikai értelme, hiszen

$$\begin{aligned} \frac{p + k + l + \sqrt{(p + k + l)^2 - 4pk}}{2} &= \frac{p + k + l + \sqrt{(k + l - p)^2 + 4pl}}{2} \geq \\ &\geq \frac{p + k + l + (k + l - p)}{2} = k + l, \end{aligned}$$

tehát szükségképpen

$$x = \frac{p + k + l - \sqrt{(p + k + l)^2 - 4pk}}{2} = \frac{p + k + l - \sqrt{(k + l - p)^2 + 4pl}}{2}$$

Erről egyébként a következőket láthatjuk be:

$$\begin{aligned} x &= \frac{p + k + l - \sqrt{(p + k + l)^2 - 4pk}}{2} \geq \frac{p + k + l - \sqrt{(p + k + l)^2}}{2} = 0, \\ x &= \frac{p + k + l - \sqrt{(k + l - p)^2 + 4pl}}{2} \leq \frac{p + k + l - (k + l - p)}{2} = p. \end{aligned}$$

Megemlíjtük még, hogy az előbbieken feltételeztük, hogy az üvegcső elég hosszú.

Klebinckzi József (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A kitűzött feladatban melléeffektusok is felléphetnek. Ilyen pl. a kapillaritás jelensége. Ezt a görbületi nyomással vehetjük figyelembe. Legyen a görbületi nyomás $p_g = 2\alpha/R$, ahol α a felületi feszültség, R pedig a felület görbületi sugara. Így

$$p = p_1 + x + p_g \quad (\text{nyomások egyensúlya}),$$

$Al \cdot (p - p_g) = A(l + k - x)p_1$ (Boyle–Mariotte törvény).

Az ezekből származtatható egyenlet $x^2 - x[l + k + (p - p_g)] + k(p - p_g) = 0$. Legyen $p_{\text{eff}} = p - p_g$. Ekkor a megoldás most is az előbbihez hasonló alakú:

$$x = \frac{(l + k + p_{\text{eff}}) - \sqrt{(l + k + p_{\text{eff}})^2 - 4p_{\text{eff}}k}}{2}.$$

A görbületi nyomást tehát egyszerűen le kell vonni a külső légnyomásból.

Guoth János (Bp., Radnóti M. Gyak. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

2. Egy másik mellékeffektus az, hogy véges kiterjedésű tál esetén a külső higanyszint lesüllyed, miközben a belső megemelkedik. Ha A_1 a cső keresztmetszete, A_2 a tálé, akkor a megemelés után a higany felszíne $\left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right)x$ értékkel lesz magasabban a csőben, mint a tálban. (Itt x a higany felszínének a kiindulási állapothoz viszonyított emelkedését jelenti.) A két egyenlet most

$$p = p_1 + x \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right).$$

$$A_1 l \cdot p = (k + l - x) A_1 \cdot p_1.$$

Ezekből az egyenlet x -re:

$$x^2 \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) - x \left[\left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right)(l + k) + p \right] + pk = 0.$$

Mivel $1 + \frac{A_1}{A_2} \neq 0$, így

$$x^2 - x \left[l + k + \frac{p}{1 + \frac{A_1}{A_2}} \right] + k \cdot \frac{p}{1 + \frac{A_1}{A_2}} = 0.$$

Legyen $p_{\text{eff}} = \frac{p}{1 + \frac{A_1}{A_2}}$, a megoldás alakja most is

$$x = \frac{(l + k + p_{\text{eff}}) - \sqrt{(l + k + p_{\text{eff}})^2 - 4p_{\text{eff}}k}}{2}.$$

Vegyük észre, hogy gyökeresen különböző jelenségeket tudunk leírni ugyanazzal a formális kifejezéssel azáltal, hogy a betűk jelentése megváltozott. (Ebben az esetben a tál véges kiterjedésének figyelembevétele úgy jelentkezett az egyenletben, mintha a külső p nyomás lecsökkent volna egy p_{eff} nyomásra.) Bonyolultabb fizikai feladatok megoldásánál is gyakran szokásos hasonló fogással élni. Ez az alapja az ún. „effektív mennyiségek” bevezetésének, amelyek így sok esetben egyszerűsítik a számításokat.

Juhász Tibor (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján