

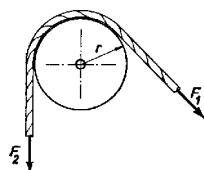
A feladatot úgy fogjuk megoldani, hogy a vizsgált szerkezetet képzeletben részekre bontjuk és minden részre külön-külön felírjuk a nyugalom feltételét:

a ható erők összege 0,
a forgatónyomatékok összege 0.

A rendszert annyi darabra bontjuk szét, hogy végül a megoldáshoz elég egyenlet álljon rendelkezésünkre.

Először bebizonyítjuk, hogy ha egy merev rúd valamely keresztmetszetében valamilyen – tetszőleges irányú – F erő hat, akkor ugyanez az erő feszíti a rúd minden keresztmetszetét addig, amíg a rúdra külső erő nem hat.

Nézzük a rúd egy kis darabját! Feltételezésünk szerint erre a darabra csak a rúd jobb és bal oldali folytatása hat. Ha az egyik végén (pl. a bal oldalin) a bal oldali rész K erővel hat a darabra, akkor ahhoz, hogy a darab nyugalomban maradjon, másik végén ellentétes irányú, azonos nagyságú erőnek kell hatnia, mert a ható erők összege 0. Ha a rúd jobb oldali része a vizsgált darabra K erővel hat, akkor a vizsgált darab a rúd jobb oldali részére ellentétes irányú, azonos nagyságú erővel (hatás-ellenhatás törvénye), azaz K -val hat. Beláttuk, hogy ha a rúd bal oldali része K erővel hat a rúd egy darabjára, akkor ez a darab a K erőt továbbítja a rúd jobb oldali része felé.



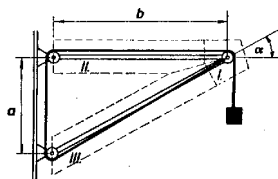
1. ábra

Írjuk fel a csigára ható forgatónyomatékok összegét (1. ábra):

$$M = F_1 r - F_2 r = 0.$$

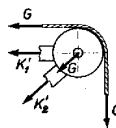
Ebből $F_1 = F_2$, azaz kijelenthetjük, hogy ha valahol a kötélt irányt változtat, akkor a csigára két egyenlő nagyságú kötélerő hat.

Az előbbi gondolatmenethez hasonló módon azt is bebizonyíthatjuk, hogy ezen erők nagysága G (ha $G = 150$ kp, a kötélre akasztott test súlya). A kötélben ható erő azért mindig kötélirányú, mert a kötélt – ellentétben a merev rúddal – forgatónyomaték hatására elgörbül.



2. ábra

a) A konzol szaggatott vonallal határolt részeit (2. ábra) külön vizsgáljuk.

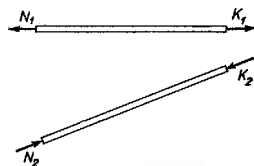


3. ábra

Az egyensúly feltétele az I. részre (3. ábra; a vízszintes rúdban ható erőt K_1 -gyel, a ferde rúdban hatót K_2 -vel, a reakcióerőket K'_1 , K'_2 -vel, a függőleges, illetve vízszintes komponenseket – melyeket az ábrán nem tüntettünk fel – y , illetve x indexszel jelöljük):

(Ia)
$$K'_{2x} - K'_{1x} - G - G \cos \alpha = 0,$$

(Ib)
$$K'_{2y} - K'_{1y} - G - G \sin \alpha = 0.$$



4. ábra

A II. és III. részre (4. ábra):

$$(II) \quad K_{1y} \cdot b = 0,$$

$$(III) \quad K_{2x} \cdot a - K_{2y} \cdot b = 0.$$

Az I. egyenletcsoportnál nem kellett felhasználni a forgatónyomatékok összegét, a II. és III.-nál az erők összegét.

Tudjuk, hogy K_1 , K'_1 , valamint K_2 , K'_2 egymás reakcióerői, ezért

$$K_{1x} = K'_{1x}, \quad K_{1y} = K'_{1y}, \quad K_{2x} = K'_{2x}, \quad K_{2y} = K'_{2y}.$$

A II. és III. egyenletekből következik, hogy a K_1 és K_2 erő a rúd irányában hat.

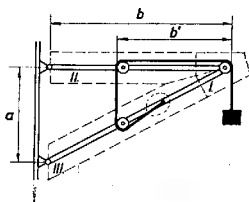
Az egyenletrendszer megoldva

$$\begin{aligned} K_{1x} &= G \left(\frac{b}{a} - 1 \right) = 110 \text{ kp}, & K_{1y} &= 0, \\ K_{2x} &= G \left(\frac{b}{a} + \cos \alpha \right) = 390 \text{ kp}, & K_{2y} &= G(1 + \sin \alpha) = 215 \text{ kp}. \end{aligned}$$

Ezzel a rudakban ható erőket teljesen meghatároztuk. Célszerű kiszámítani az erők nagyságát és irányát is:

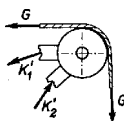
$$\begin{aligned} K_1 &= G \left(\frac{b}{a} - 1 \right) = 110 \text{ kp} & \alpha_1 &= 0^\circ, \\ K_2 &= G(1 + \sin \alpha) \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} = 450 \text{ kp}, & \alpha_2 &= 210^\circ. \end{aligned}$$

(α_1 α_2 az erők vízszintessel bezárt szöge, az óramutató járásával ellentétes irányban mérve.)

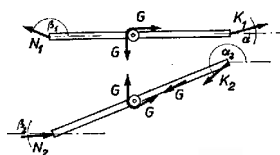


5. ábra

b) Az előzőhöz hasonló felbontást alkalmazva (5. ábra) ismét felrajzoljuk a megfelelő részekre ható erőket (6., 7. ábra), és felírjuk az egyensúly feltételét.



6. ábra



7. ábra

$$(Ia) \quad K'_{2x} - K'_{1x} - G = 0,$$

$$(Ib) \quad K'_{2y} - K'_{1y} - G = 0,$$

$$(IIa) \quad -N_{1x} + G + K_{1x} = 0,$$

$$(IIb) \quad N_{1y} - G + K_{1y} = 0,$$

$$(IIc) \quad -N_{1y} \cdot b + G \cdot b' = 0,$$

$$(IIIa) \quad N_{2x} + G \cos \alpha - G \cos \alpha - K_{2x} = 0,$$

$$(IIIb) \quad N_{2y} = G + G \sin \alpha - G \sin \alpha - K_{2y} = 0,$$

$$(IIIc) \quad -N_{2y} \cdot b + N_{2x} \cdot a - G \cdot b' = 0.$$

Továbbá $K_{1x} = K'_{1x}$, $K_{1y} = K'_{1y}$, $K_{2x} = K'_{2x}$, $K_{2y} = K'_{2y}$.

Az egyenletrendszer megoldva azt kapjuk, hogy a vízszintes rúdban a két csiga közötti részen

$$K_{1x} = G \left(\frac{b}{a} - 1 \right) = 110 \text{ kp}, \quad K_{1y} = G \left(1 - \frac{b'}{b} \right) = 45 \text{ kp};$$

$$K_1 = 118 \text{ kp} \quad a_1 = 22^\circ,$$

a középső csiga és a fal között

$$N_{1x} - G \frac{b}{a} = 260 \text{ kp},$$

$$N_1 = 280 \text{ kp},$$

$$\beta_1 = 158^\circ$$

$$N_{1y} = G \frac{b'}{b} = 105 \text{ kp};$$

nagyságú és irányú erő hat.

A ferde rúdban a végén levő csiga és a kötél vége közötti részen

$$K_{2x} = G \frac{b}{a} = 260 \text{ kp},$$

$$K_2 = 325 \text{ kp},$$

$$K_{2y} - G \left(2 - \frac{b'}{b} \right) = 195 \text{ kp};$$

$$\alpha = 217^\circ,$$

a középső csiga és a fal között

$$N_{2x} = G \frac{b}{a} = 260 \text{ kp},$$

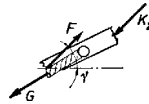
$$N_2 = 264 \text{ kp},$$

$$\beta = 3^\circ,$$

$$N_{2y} - G \left(1 - \frac{b'}{b} \right) = 45 \text{ kp};$$

nagyságú és irányú erő hat.

Tisztázni kell még, hogy milyen erő hat a ferde rúdban a középső csiga és a kötél vége közötti részen.



8. ábra

Vizsgáljuk a rúdnak az 5. ábrán bekarikázott részét (8. ábra):

$$F_x - G \cos \alpha - K_{2x} = 0,$$

$$F_y - G \sin \alpha - K_{2y} = 0.$$

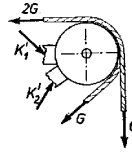
Ebből a keresett erő:

$$F_x = G \left(\frac{b}{a} + \cos \alpha \right) = 390 \text{ kp},$$

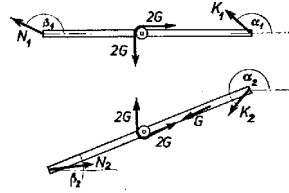
$$F_y = G \left(2 - \frac{b'}{b} + \sin \alpha \right) = 270 \text{ kp};$$

$$F = 470 \text{ kp}, \quad \gamma = 34^\circ.$$

c) Az előző két megoldáshoz hasonló módon járunk el. Természetesen, két azonos helyen ható, párhuzamos, G nagyságú erő helyettesíthető $2G$ -vel (9., 10. ábra).



9. ábra



10. ábra

$$(Ia) \quad K'_{2x} + K'_{1x} - G \cos \alpha - 2G = 0,$$

$$(Ib) \quad K'_{2y} - G \cdot \sin \alpha - G - K'_{1y} = 0,$$

$$(IIa) \quad -N_{1x} + 2G - K_{1x} = 0,$$

$$(IIb) \quad N_{1y} - 2G + K_{1x} = 0,$$

$$(IIc) \quad -N_{1y} \cdot b + 2G \cdot b' = 0,$$

$$(IIIa) \quad N_{2x} + 2G \cos \alpha - G \cos \alpha - K_{2x} = 0,$$

$$(IIIb) \quad -N_{2y} + 2G + 2G \sin \alpha - G \sin \alpha - K_{2y} = 0,$$

$$(IIIc) \quad -N_{2y} \cdot b + 2G \cdot b' - N_{2x} \cdot a = 0.$$

Megoldva az egyenletrendszer, a ható erők a vízszintes rúdban a két csiga közötti részen:

$$K_{1x} = G \left(2 - \frac{b}{a} \right) = 40 \text{ kp}, \quad K_{1y} = 2G \left(1 - \frac{b'}{b} \right) = 90 \text{ kp};$$

$$K_1 = 98,5 \text{ kp}, \quad \alpha_1 = 109^\circ,$$

a középső csiga és a fal közötti részen:

$$N_{1x} = G \frac{b}{a} = 260 \text{ kp}, \quad N_{1y} = 2G \frac{b'}{b} = 210 \text{ kp};$$

$$N_{1x} = 334 \text{ kp}, \quad \beta_1 = 141^\circ,$$

a ferde rúdban a végén levő csiga és a kötél vége közötti részen:

$$K_{2x} = G \left(\frac{b}{a} + \cos \alpha \right) = 390 \text{ kp}, \quad K_{2y} = G \left(3 - 2 \frac{b'}{b} + \sin \alpha \right) = 315 \text{ kp};$$

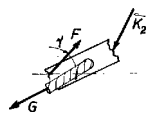
$$K_2 = 500 \text{ kp}, \quad \alpha_2 = 219^\circ,$$

a fal és a középső csiga közötti részen:

$$N_{2x} = G \frac{b}{a} = 260 \text{ kp}, \quad N_{2y} = 2 \left(\frac{b'}{b} - 1 \right) = 60 \text{ kp};$$

$$N_2 = 267 \text{ kp}, \quad \beta_2 = 13^\circ,$$

A középső csiga és a kötél vége közötti részen ható erő meghatározásához vizsgáljuk a ferde rúd 5. ábrán bekarikázott részét (11. ábra):



11. ábra

$$F_x - G \cos \alpha - K_{2x} = 0,$$

$$F_y - G \sin \alpha - K_{2y} = 0.$$

Ebből

$$F_x = G \left(\frac{b}{a} + 2 \cos \alpha \right) = 520 \text{ kp},$$

$$F_y = G \left(3 - 2 \frac{b'}{b} + 2 \sin \alpha \right) = 390 \text{ kp};$$

$$F = 650 \text{ kp},$$

$$\gamma = 37^\circ,$$

Herényi Levente (Bp., I. István Gimn. II. o. t.)

Gács Lajos (Bp., Landler Jenő Techn., II. o. t.)

dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Ilyen jellegű feladatok megoldásánál ajánlatos részletes rajzot készíteni a ható erőkről. Az erők irányát szabadon választhatjuk, célszerű azonban – a nagyobb szemléletesség kedvéért – úgy megválasztani őket, hogy komponenseikre pozitív értéket kapjunk. Ezt tettük ennél a megoldásnál is.

2. Mint láthattuk, az *a)* feladat kivételével a rudakban ható erők sehol sem voltak rúdírányúak. Éppen ezért kaptak helytelen eredményt azok, akik – minden indoklás nélkül – a ható erőknek rúdírányú komponensekre való bontásával próbálták a feladatot megoldani.