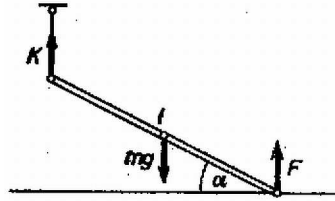


A fonál elégetése előtt a rúdra K kötélrő, a talaj F nyomóereje és mg súlyerő hat. A rúd nyugalomban van, ezért az erők eredője és a forgatónyomatékok összege nulla.



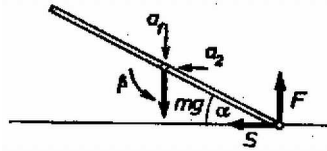
1. ábra

A talaj és a rúd közt fellépő F erő csak függőleges lehet, hiszen a másik két erő is függőleges (1. ábra), így

$$K + F - mg = 0, \quad \frac{K \cdot l \cdot \cos \alpha}{2} - \frac{F \cdot l \cdot \cos \alpha}{2} = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása ($\alpha \neq 90^\circ$ esetben) $K = F = mg/2$.

Ha a fonalat elégetjük, akkor a rúd nem marad egyensúlyban, hanem gyorsuló mozgásba kezd. Mozgását jellemezhetjük a súlypont gyorsulásának vízszintes és függőleges összetevőjével, valamint a súlypont körüli β szöggyorsulással. A rúdra ható erők: az mg súlyerő, a talaj F nyomóereje és S súrlódási erő (2. ábra).



2. ábra

A talaj most nemcsak függőleges nyomóerővel hat a rúdra, mivel az nincs egyensúlyban, hanem vízszintes súrlódási erővel is, és éppen ez az erő hozza létre a rúd vízszintes gyorsulását.

Írjuk fel a mozgásegyenletet a függőleges és a vízszintes komponensekre

$$(1) \quad mg - F = m \cdot a_1,$$

$$(2) \quad S = m a_2.$$

Felírhatjuk még a forgómozgás alapegyenletét (a súlypontra vonatkoztatva), felhasználva, hogy egy homogén rúd tehetetlenségi nyomatéka $ml^2/12$.

$$(3) \quad \frac{F \cdot l \cdot \cos \alpha}{2} - \frac{S \cdot l \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{ml^2}{12} \beta.$$

A test mozgását jellemző a_1 , a_2 és β mennyiségek nem függetlenek egymástól, mivel a rúd alsó vége csak vízszintes irányú mozgást végezhet. Ezt az

$$(4) \quad a_1 = \frac{l \cdot \beta}{2} \cos \alpha$$

egyenlet biztosítja.

Az (1)–(4) egyenletekben 5 ismeretlen szerepel (a_1 , a_2 , β , F , S). A hiányzó ötödik egyenlet felírásánál két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha a rúd talppontja csúszik a talajon, akkor

$$(5) \quad S = \mu F.$$

Ez az egyenlet akkor érvényes, ha a rúd valóban jobbra csúszik, vagyis ha

$$(6) \quad \frac{l}{2} \beta \sin \alpha \geq a_2.$$

Az (1)–(5) egyenletrendszer megoldása F és S -re:

$$(7) \quad F = \frac{mg}{1 + 3 \cos \alpha (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)},$$

$$(8) \quad S = \frac{mg\mu}{1 + 3 \cos \alpha (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)};$$

a (6) feltétel pedig akkor teljesül, ha

$$(9) \quad \mu \leq \frac{3 \operatorname{tg} \alpha}{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Ha a rúd nem csúszik a talajon, akkor S és F között már nem áll fenn az (5) egyenlet. A hiányzó egyenletet éppen az a feltétel adja, hogy a rúd talppontja nem mozdul el, vagyis

$$(5') \quad \frac{l}{2} \beta \sin \alpha = a_2.$$

Ez a lehetőség akkor valósul meg, amikor a súrlódási együttható elég nagy ahhoz, hogy teljesüljön a

$$(6') \quad S \leq \mu F$$

egyenlőtlenség. Az (1)–(4) és (5') egyenletrendszer megoldása

$$(7') \quad F = mg \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 \alpha \right),$$

$$(8') \quad S = \frac{3}{4} mg \sin \alpha \cos \alpha,$$

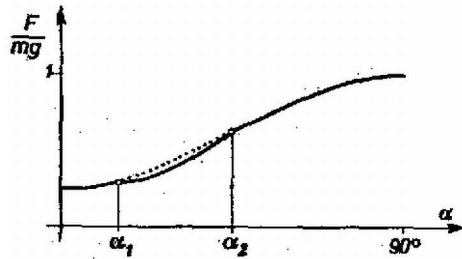
és a megoldás érvényességének (6') feltétele

$$(9') \quad \mu \geq \frac{3 \operatorname{tg} \alpha}{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

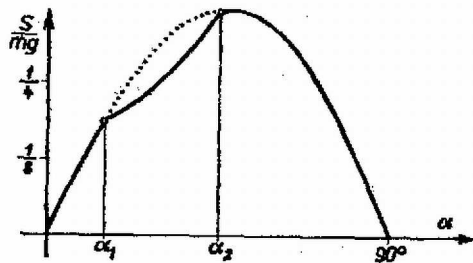
alakban írható.

Ábrázoljuk F és S erőket az indulás α szögének függvényében adott μ súrlódási együttható mellett. Először határozzuk meg azt a kritikus α szöget, melynél a rúd még éppen nem csúszik!

A $\mu_0 = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha}{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha}$ egyenletnek α -ra nincs megoldása, ha $\mu_0 > 3/4$. Ilyenkor mindig (9') érvényes, vagyis a rúd nem csúszik. Ha $\mu_0 < 3/4$, akkor létezik olyan α_1 és α_2 szög, melyek közé választva az α indítási szöget, a rúd csúszni kezd. Amennyiben $\alpha < \alpha_1$ vagy $\alpha > \alpha_2$, akkor (9') teljesül, és a rúd nem csúszik.



3. ábra



4. ábra

A 3. és 4. ábrán F és S különböző értékeit láthatjuk $\mu_0 = 3/5$ esetén.