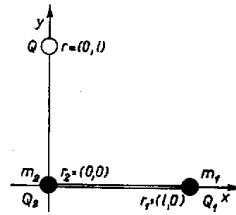


I. megoldás. A feladatban négy objektum szerepel: a Q_1 töltésű m_1 tömeg, a Q_2 töltésű m_2 tömeg, a rögzített Q töltés és a súlytalan merev szigetelő rúd. A megoldást a Newton-axiómák *következetes* alkalmazásával kaphatjuk meg. (A hangsúly itt a következetességen, amely sajnos a megoldók többségénél hiányzott.) Vegyük fel az 1. ábrán látható koordináta-rendszert. A Q_2 töltés az origóba, a Q_1 az x tengelyre, a Q pedig az y tengelyre essék.



1. ábra

Newton II. axiómája azt mondja, hogy az egyes testek tömegének és gyorsulásának szorzata egyenlő a ráható *összes* erők eredőjével. Ebben talán a leglényegesebb az összes szó, legalábbis erről feledkeztek meg a legtöbben. Vizsgáljuk meg tehát *külön-külön* az egyes objektumokra ható összes erőt, majd ezután határozzuk meg ezek eredőjét.

Az $r_2 = (0, 0)$ pontbeli Q_2 töltésre ható erők – 2a ábra – a következők. (A továbbiakban egyszerűség kedvéért figyelmen kívül hagyjuk a tömegek között fellépő, az elektromos erőkhez képest elenyésző nagyságú gravitációs erőket, nem ez az erő hiányzott az „összes” erők közül. A 816. feladat megoldásánál a vektorok derékszögű komponenseit zárójelben tüntetjük fel.)

1. Az $r = (0, l)$ -beli Q töltésből származó Coulomb-erő (lásd a megjegyzést):

$$F_1^{(2)} = k \frac{QQ_2}{|r_2 - r|^2} \cdot \frac{r_2 - r}{|r_2 - r|} = \left(0, -k \frac{QQ_2}{l^2} \right)$$

2. Az $r_1 = (l, 0)$ -beli Q_1 töltésből pedig

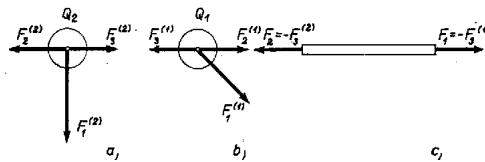
$$F_2^{(2)} = k \frac{Q_1Q_2}{|r_2 - r|^2} \cdot \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|} = \left(-k \frac{Q_1Q_2}{l^2}, 0 \right)$$

Coulomb erő hat.

3. A Q_1 -t és a Q_2 -t összekötő rúd a közvetlen mechanikai csatlakozás révén (ez az, amiről oly sokan megfélekeztek)

$$F_3^{(2)} = (K_2, 0)$$

erővel hat a Q_2 töltésre, amely a rúd vékony és merev volta miatt csak x irányú lehet. Azt azonban még egyelőre nem tudjuk, hogy ez a K_2 mekkora.



2. ábra

Hasonló módon a Q_1 töltésre ható erők (2b ábra):

1. A Coulomb erő a Q töltésből

$$F_1^{(1)} = k \frac{QQ_1}{|r_1 - r|^2} \cdot \frac{r_1 - r}{|r_1 - r|} = k \frac{QQ_1}{2l^2} \cdot \left(\frac{l}{\sqrt{2}l}, \frac{-1}{\sqrt{2}l} \right) = \left(k \frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2}, -k \frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2} \right).$$

2. A Q_2 -ből származó Coulomb erő:

$$F_2^{(1)} = -F_2^{(2)} = \left(+k \frac{Q_1Q_2}{l^2}, 0 \right).$$

3. Az összekötő rúd nyilvánvalóan erre is csak x irányú erővel hat:

$$F_3^{(1)} = (K_1, 0).$$

Mivel a Q töltés rögzítve van, így akármekkora erő is hat rá, nem jöhet létre gyorsulás („végtelen” a tömege), ezért nem érdekesek a ráható erők. Annál érdekesebbek viszont az összekötő rúdra ható erők (2c ábra). Mivel a rúd $F_3^{(1)}$

erővel hat a Q_1 töltésre, ezért a rúdra a III. axióma értelmében $F_1 = -F_3^{(1)} = (-K_1, 0)$ erő hat, ugyanígy hat persze a rúdra az $F_3^{(2)}$ erő ellenereje is, az $F_2 = -F_3^{(2)} = (-K_2, 0)$ erő. Most alkalmazzuk Newton II. axiómáját először az összekötő rúdra. Mivel ennek tömege nulla, ezért az erők összege:

$$ma = F_1 + F_2 = 0,$$

amely komponensekre kiírva azt jelenti, hogy

$$(1) \quad \begin{aligned} -K_1 - K_2 &= 0, \\ 0 + 0 &= 0. \end{aligned}$$

Vagyis $K_1 = -K_2$ amely felére csökkenti ugyan az ismeretlenek számát, de még mindig ismeretlen marad a rúdban ébredő erő. Ennek az az oka, hogy ezt a K_1 erőt, az ún. kényszererőt – amely azért hat a két tömeg között, mert azok mozgása és így a gyorsulása nem lehet tetszőleges, ugyanis a rúd merevsége miatt a két tömeg távolsága nem változhat – meghatározó feltételt még eddig nem vettük figyelembe. Ez a *geometriai* feltétel matematikailag azt jelenti, hogy

$$|r_1(t) - r_2(t)|^2 = l^2.$$

Ezt az összefüggést felhasználva próbáljunk valamilyen kapcsolatot keresni a gyorsulások között. Ha az m_1 , ill. az m_2 tömeg gyorsulása a kezdetben a_1 , ill. a_2 , és a kezdősebességük nulla, akkor egy kis Δt idő alatt az elmozdulásuk

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_{1x}}{2}\Delta t^2, \frac{a_{1y}}{2}\Delta t^2\right) &= \Delta r_1, \quad \text{illetve} \quad \left(\frac{a_{2x}}{2}\Delta t^2, \frac{a_{2y}}{2}\Delta t^2\right) = \Delta r_2, \quad \text{vagyis} \\ r_1(t = \Delta t) &= r_1(0) + \Delta r_1 = \left(1 + \frac{a_{1x}}{2}\Delta t^2, \frac{a_{1y}}{2}\Delta t^2\right), \\ r_2(t = \Delta t) &= r_2(0) + \Delta r_2 = \left(\frac{a_{2x}}{2}\Delta t^2, \frac{a_{2y}}{2}\Delta t^2\right), \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve a geometriai feltételbe:

$$l^2 = \left(l + \frac{a_{1x}}{2}\Delta t^2 - \frac{a_{2x}}{2}\Delta t^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a_{1y}\Delta t^2 - \frac{1}{2}a_{2y}\Delta t^2\right)^2$$

Ebből

$$-l(a_{1x} - a_{2x})\Delta t^2 = \frac{1}{4}[(a_{1x} - a_{2x})^2 + (a_{1y} - a_{2y})^2]\Delta t^4.$$

Δt^2 -tel egyszerűsítve:

$$-l(a_{1x} - a_{2x}) = \frac{1}{4}[(a_{1x} - a_{2x})^2 + (a_{1y} - a_{2y})^2]\Delta t^2.$$

Ha Δt nagyon kicsi, akkor a jobb oldalon gyakorlatilag nulla áll, ezért ebből az következik, hogy

$$(2) \quad a_{1x} = a_{2x}.$$

Nem szabad azonban elfeledkezni arról, hogy ez *csak a kezdőpillanatra* igaz! De ez számunkra éppen elég.

Most írjuk fel az m_1 és az m_2 tömegekre a II. axiómát:

$$m_1 a_1 = F_1^{(1)} + F_2^{(1)} + F_3^{(1)} \quad \text{és} \quad m_2 a_2 = F_1^{(2)} + F_2^{(2)} + F_3^{(2)}.$$

Az erőket behelyettesítve és az egyenleteket komponensenként kiírva:

$$(3) \quad m_1 a_{1x} = k \frac{Q Q_1}{\sqrt{8} l^2} + k \frac{Q_1 Q_2}{l^2} + K_1,$$

$$(4) \quad m_1 a_{1y} = -k \frac{Q Q_1}{\sqrt{8} l^2} + 0 + 0,$$

$$(5) \quad m_2 a_{2x} = 0 - k \frac{Q_1 Q_2}{l^2} + (-K_1) = m_2 a_{1x},$$

$$(6) \quad m_2 a_{2y} = -k \frac{Q Q_2}{l^2} + 0 + 0.$$

Az (5) egyenlet felírásánál felhasználtuk az (1) és a (2) egyenleteket. Ebben a négy egyenletben négy ismeretlen van: a_{1x} , a_{1y} , a_{2y} és K_1 . A (3) m_2 -szeresét és az (5) m_1 -szeresét véve egyenletet kapunk K_1 -re:

$$m_2 k \frac{Q_1}{l^2} \left(\frac{Q}{\sqrt{8}} + Q_2 \right) + m_2 K_1 = -m_1 k \frac{Q_1 Q_2}{l^2} - m_1 K_1.$$

Ebből:

$$K_1 = -k \frac{Q_1}{l^2} \left[\frac{Q}{\sqrt{8}} \frac{m_2}{m_1 + m_2} + Q_2 \right].$$

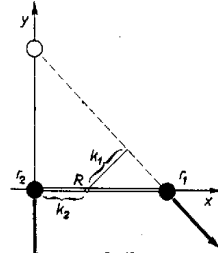
Ekkora erő hat tehát a rúdban. Ezt visszahelyettesítve sorra kifejezhetjük az egyes gyorsulásokat is:

$$\begin{aligned} a_{1x} &= \frac{k}{m_1 + m_2} \frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2}, & a_{1y} &= -\frac{k}{m_1} \frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2}, \\ a_{2x} &= \frac{k}{m_1 + m_2} \frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2}, & a_{2y} &= \frac{k}{m_2} \frac{QQ_2}{\sqrt{8}l^2}, \end{aligned}$$

Maróti Péter (Szeged, Ságvári E. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Csak az tudja igazán értékelni a következő megoldást, aki végigolvasta az előző, közvetlenül a Newton-axiómákon alapuló megoldást. Bár végső soron ez az egyszerű megoldás is ezeken alapul, csak éppen a feladathoz jobban illő alakjukat használja fel. A Newton-axiómák egyik közvetlen következménye a tömegközéppont mozgásának tétele, amely szerint egy pontrendszer súlypontja úgy mozog, mintha az egész tömeg abba lenne koncentráva, és arra hatna az összes *külső* erő. Egyrészt ezt fogjuk felhasználni, másrészt pedig azt, hogy egy merev test szöggyorsulása egyenlő a forgatónyomaték és a tehetetlenségi nyomaték hányadosával. (Ez az egyenlet azonos Newton II. axiómájával, csak éppen azt ügyes, a probléma lényegét – a merevséget – jól megragadó paraméterekkel írja fel. Az egyes tömegeket a tehetetlenségi nyomatékba, az egyes erőket az eredő forgatónyomatékba, a sok-sok gyorsulást pedig a szöggyorsulásba sűríti. Így elkerülhetővé válik a kínos geometriai feltételek állandó figyelembe vétele.)

A tömegek gyorsulása két részből tevődik össze: a súlypont gyorsulása plusz. a súlypont körüli szöggyorsulásból eredő gyorsulás. Módszerünk előnye, hogy ez a kettő egymástól függetlenül meghatározható.



3. ábra

Jelen esetben a pontrendszert a rúd két végén levő tömegek alkotják. A tömegközéppont koordinátája (3. ábra):

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}.$$

Az ebbe képzelt össztömeg:

$$M = m_1 + m_2.$$

A külső erők csak a Q -ból származó Coulomb-erők (az előző jelöléseket alkalmazva):

$$F = F_1^{(1)} + F_1^{(2)} = \left(k \frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2}, -k \frac{Q}{l^2} \left(\frac{Q_1}{\sqrt{8}} + Q_2 \right) \right).$$

Tehát a tömegközéppont gyorsulása:

$$a_x = \frac{F_x}{M} = \frac{k}{m_1 + m_2} \cdot \frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2}, \quad a_y = \frac{F_y}{M} = -\frac{k}{m_1 + m_2} \cdot \frac{Q}{l^2} \left(\frac{Q}{\sqrt{8}} + Q_2 \right).$$

A tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

$$I = m_1(r_1 - R)^2 + m_2(r_2 - R)^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

Az egyes külső erők erőkarja (lásd a 3. ábrát):

$$k_1 = \sqrt{2}|r_1 - R| \quad \text{és} \quad k_2 = |r_2 - R|.$$

Így az eredő forgatónyomaték:

$$M = -k_1 |F_1^{(1)}| + k_2 |F_1^{(2)}| = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cdot k \frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \cdot k \frac{QQ_2}{l^2}.$$

Ebből a szöggyorsulás:

$$\beta = \frac{M}{I} = k \frac{Q}{l^2} \left[-\frac{1}{m_1} \cdot \frac{Q_1}{\sqrt{8}l} + \frac{1}{m_2} \cdot \frac{Q_2}{l} \right].$$

A tömegeknek a forgásból származó gyorsulása kezdetben csak y irányú, mert a súlypont körül történik a forgás. Ezért az x -irányú gyorsulásuk egyenlő, nagysága pedig megegyezik a tömegközéppont x -irányú gyorsulásával, tehát

$$a_{1x} = a_{2x} = \frac{k}{m_1 + m_2} \frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2}.$$

Az m_1 tömeg forgásból származó y -irányú gyorsulása:

$$a_{1y}^{\text{forg}} = |r_1 - R|\beta = \frac{k}{m_1 + m_2} \frac{Q}{l^2} \left[-\frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{Q_1}{\sqrt{8}} + Q_2 \right],$$

az m_2 tömegé pedig

$$a_{2y}^{\text{forg}} = -|r_2 - R|\beta = \frac{k}{m_1 + m_2} \frac{Q}{l^2} \left[-\frac{m_1}{m_2} Q_2 + \frac{Q_1}{\sqrt{8}} \right].$$

A haladó és forgó mozgás y -irányú eredője:

$$a_{1y} = a_y + a_{1y}^{\text{forg}} = -\frac{k}{m_1} \cdot \frac{QQ_1}{\sqrt{8}l^2},$$

$$a_{2y} = a_y + a_{2y}^{\text{forg}} = -\frac{k}{m_2} \cdot \frac{QQ_2}{l^2}.$$

Ennek a megoldásnak előnye és ugyanakkor hátránya, hogy nem jelenik meg benne a rúdban ébredő erő. Persze a gyorsulások ismeretében könnyen meghatározhatjuk ezt is. Ez azonban az előző megoldáshoz képest nem jelentene semmi újat, hiszen újra csak a (3) vagy az (5) egyenletből kellene K_1 -et kifejezni.

Horváthy Péter (Budapest., Fazekas M. Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. Az x -irányú gyorsulás egyszerűbben is meghatározható, ha abból indulunk ki, hogy az egész rúd x -irányú elmozdulása csak a Q és a Q_1 közötti Coulomb-erőnek a rúd irányába eső komponensének a hatására következik be. Vagyis

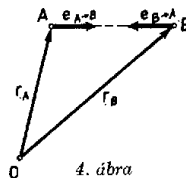
$$a_{1x} = a_{2x} = k \frac{QQ_1}{2l^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{m_1 + m_2}.$$

A rúdban ébredő erőnek eleve csak x -komponense lehet, ez két részből tevődik össze: a Q_1 és a Q_2 közötti Coulomb-erőt ellensúlyozó erő, és az m_2 tömeg a_{2x} gyorsulását létrehozó $m_2 a_{2x}$ erő. Tehát a rúdban ébredő erő:

$$K = k \frac{Q_1 Q_2}{l^2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot k \frac{QQ_1}{2l^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Walthier Tamás (Bp., Piarista Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Foglalkozzunk egy kicsit részletesebben a Coulomb-törvénnyel, ill. a hozzá nagyon hasonló Newton-féle gravitációs törvénnyel. Általában csak azt szokták mondani, hogy a két tömeg (töltés) között fellépő erő egyenlő a két tömeg (töltés) szorzatának és a köztük levő távolság négyzetének a hányadosával, amelyet meg kell szorozni egy megfelelő állandóval. (Az állandó elsősorban az egységek megválasztásával van kapcsolatban.) Ez azonban az erőnek csak a nagysága. Az erő viszont vektor mennyiség, ezért meg kell adni az *irányát* is. Szóban ezt úgy szokták elintézni, hogy az erő centrális, azaz a két tömeget összekötő egyenes mentén hat, előjele pedig olyan, hogy a két tömeg vonzza egymást, két töltés esetén az egyneműek taszítják, a különneműek vonzzák egymást. Mi azonban egy általános képletet szeretnénk, amelyben nem kell külön-külön megvizsgálni az ilyen speciális eseteket. Ehhez pedig nem kell mást tenni, mint megadni egy olyan egységnyi hosszúságú vektort, amelynek az iránya megegyezik az erő irányával.



4. ábra

Ha a két objektumot A -val és B -vel jelöljük, és ezek az r_A ill. r_B helyvektorral jelzett pontokban helyezkednek el (4. ábra), akkor az A -ból a B -be mutató egységvektor:

$$e_{A \rightarrow B} = \frac{r_B - r_A}{|r_B - r_A|}.$$

A B -ből az A -ba mutató egységvektor pedig:

$$\mathbf{e}_{B \rightarrow A} = -\mathbf{e}_{A \rightarrow B} \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|},$$

ahol $|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A| = |\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|$ az $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ vektor hossza, azaz az A és B pontok távolsága. Ebből a gravitációs erő általános vektoralakja, ha az A pontban m_A , a B pontban m_B tömeget helyezünk el:

a) Az m_A tömegre ható gravitációs erő:

$$\mathbf{F}_A = f \frac{m_A \cdot m_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2} \cdot \mathbf{e}_{A \rightarrow B} = f \frac{m_A \cdot m_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|}.$$

b) Az m_B tömegre ható gravitációs erő:

$$\mathbf{F}_B = f \frac{m_A \cdot m_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2} \cdot \mathbf{e}_{B \rightarrow A} = f \frac{m_A \cdot m_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|}.$$

A Coulomb erő általános alakja csak annyiban tér el ettől, hogy figyelembe kell venni a töltések előjelét is.

a) A Q_A (előjelesen vett) töltésre ható Coulomb erő:

$$\mathbf{F}_A = -k \frac{Q_A Q_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2} \cdot \mathbf{e}_{A \rightarrow B} = k \frac{Q_A Q_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|}.$$

ahol a mínusz előjel azért szükséges, mert ha a töltések előjele azonos, akkor nyilvánvalóan az iránnyal ellentétes irányú taszító erő lép fel.

b) A Q_B töltésre így

$$\mathbf{F}_B = -k \frac{Q_B Q_A}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|^2} \cdot \mathbf{e}_{B \rightarrow A} = k \frac{Q_B Q_A}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|}.$$

Coulomb erő hat.