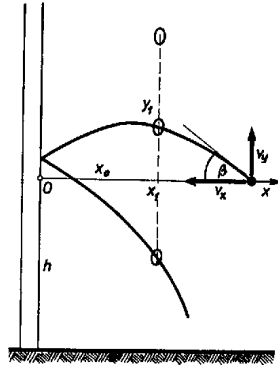


I. megoldás. a) A fallal való rugalmas ütközéskor a ferde hajítást végző golyó függőleges sebességösszetevője változatlan marad, a vízszintes pedig ellenkező irányú, de ugyanakkora lesz. Így a karikával történő első, ill. második (t_1 , ill. t_2 időpontbeli) találkozás feltétele (1. ábra):

$$\begin{aligned}v_y(t_1 - t_0) - g(t_1 - t_0)^2/2 &= y_1 - vt_1, \\v_x(t_1 - t_0) &= x_1 - x_0, \quad \text{ill.} \\v_y(t_2 - t_0) - g(t_2 - t_0)^2/2 &= y_1 - vt_2, \\v_x(t_2 - t_0) &= x_1 + x_0.\end{aligned}$$



1. ábra

Az egyenleteket megoldva a sebességösszetevők:

$$(1) \quad v_x = \sqrt{g(x_1^2 - x_0^2)/2y_0}, \quad v_y = x_1 \sqrt{2gy_0/(x_1^2 - x_0^2)} - v,$$

ahol $y_0 = y_1 - vt_0$ a karika magassága $0x$ felett a t_0 időpontban, a kilövési szög pedig

$$(2) \quad \tan \beta = v_y/v_x.$$

A képletekből a nyilvánvaló $x_1 > x_0$ -n kívül

$$(3) \quad y_0 = y_1 - vt_0 > 0, \quad \text{tehát} \quad t_0 < \frac{y_1}{v}$$

megoldhatósági feltétel is kiolvasható. Másrészt a kívánt második találkozás csak úgy jöhet létre, ha t_2 időpontig a karika nem ér földet: $y_1 + h > vt_2$, felhasználva a $t_2 = (x_1 + x_0)/v_x + t_0$ összefüggést és v_x kifejezését

$$(4) \quad h > v \sqrt{\frac{2y_0}{g} \cdot \frac{x_1 + x_0}{x_1 - x_0}} - y_0.$$

Numerikus adataink esetében a következőket kapjuk.

1. A megoldhatósági feltételek teljesülnek, $v_x \approx 32 \text{ cm s}^{-1}$, $v_y \approx 157 \text{ cm s}^{-1}$, $\beta \approx 78,6^\circ$ (felfelé kell lőnünk).
2. $y_0 = 0$, végtelen nagy v_x kellene, nincs megoldás.
3. (4) nem teljesül, nincs megoldás.
- b) A kétszeri találkozás feltételei most:

$$\begin{aligned}v_y(t_1 - t_0) - g(t_1 - t_0)^2/2 &= y_1 - gt_1^2/2, \\v_x(t_1 - t_0) &= x_1 - x_0, \quad \text{ill.} \\v_y(t_2 - t_0) - g(t_2 - t_0)^2/2 &= y_1 - gt_2^2/2, \\v_x(t_2 - t_0) &= x_1 + x_0.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása helyett egy egyszerű megfontolással könnyebben célhoz juthatunk. Mivel a golyó és a karika gyorsulása egyenlő, azért kétszeri találkozás csak úgy lehetséges, ha a függőleges sebességük és a föld feletti magasságuk is állandóan megegyezik (ui. ha pl. az első találkozásakor $v_y > v$, akkor az egyenlő gyorsulás miatt a golyó függőlegesen egyre jobban eltávolodik a karikától, újabb találkozás nem lehetséges), így a függőleges sebességösszetevő kilövéskor

$$(5) \quad v_y = gt_0$$

és

$$y_1 = (1/2)gt_0^2,$$

tehát

$$(6) \quad t_0 = \sqrt{\frac{2y_1}{g}}$$

is szükséges.

Mint látjuk, ebben az esetben a golyót csak egyetlen, az y_1 által meghatározott pillanatban indíthatjuk úgy, hogy a kétszeri találkozás létrejöjjön.

Az indítási sebesség vízszintes összetevőjére csak az ad korlátozást, hogy a második találkozásig a testek ne érjenek földet:

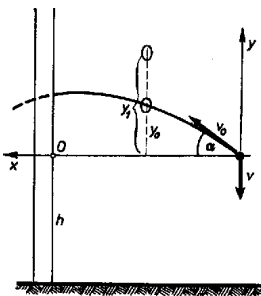
$$(7) \quad \frac{g}{2} \left(\frac{x_1 + x_0}{v_x} + t_0 \right)^2 < h + y_1;$$

az ezt kielégítő bármilyen v_x , megfelel.

Numerikus adatainkkal egyik esetben sem teljesül a (6) feltétel, így nincs megoldás.

Szamosújvári Sándor (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás (2. ábra). Az a) esetben egy a t_0 pillanatban elindított, v sebességgel lefelé haladó koordináta-rendszert használunk. Ebben a karika állandóan $y_0 = y_1 - t_0 v$ magasan van az x tengely felett, a golyó mozgása itt is ferde hajítás, csak v_x , $v_y + v$ sebességösszetevőkkel. A megvalósítandó feladat ebben a rendszerben: úgy kilőni a golyót, hogy odafelé és visszapattanva is átmenjen a rögzített $(x_1 - x_0, y_0)$ ponton. Ez pedig nyilván csak akkor lehetséges, ha a golyó ugyanazon a pályán tér vissza, amin kilőttük (mert a visszapattanás utáni pálya tükörképe a szabad továbbrepülésnek), tehát ha az a pálya tetőpontján ütközik a falnak.



2. ábra

Ezeket a feltételeket felírva, ha a kilövési sebesség, ill. szög (a mozgó koordináta-rendszerben) v_0 , ill. α , akkor

$$x_1 - x_0 = v_0 \cos \alpha t_1, \quad y_0 = v_0 \sin \alpha t_1 - gt_1^2/2, \quad x_1 = v_0^2 \sin 2\alpha/2g.$$

Az egyenletrendszert megoldva: $\tan \alpha = \frac{2x_1 y_0}{x_1^2 - x_0^2}$,

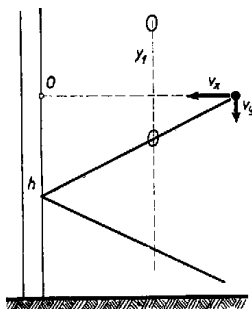
$$v_0 \sin \alpha = x_1 \sqrt{\frac{2gy_0}{x_1^2 - x_0^2}}, \quad v_0 \cos \alpha = \sqrt{\frac{g}{2y_0}(x_1^2 - x_0^2)},$$

és a keresett sebességösszetevők:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - v.$$

A megoldhatóság feltételei az első megoldáshoz hasonlóan kaphatók.

A b) esetben t_0 pillanatban elejtett, szabadon eső koordináta-rendszert használunk. Most a kilőtt golyó pályája egy β szögű egyenes, a visszapattanás után pedig a beesési merőlegesre vett tükörkép (3. ábra).



3. ábra

A karika ebben a rendszerben gt_0 állandó sebességgel fog lefelé mozogni. Az állandó sebességek miatt kétszeri találkozás csak úgy lehetséges, ha a két test függőleges sebessége megegyezik: $v_y = gt_0$, s állandóan egy magasságban vannak, tehát

$$y_1 = (1/2)gt_0^2, \quad t_0 = \sqrt{\frac{2y_1}{g}}.$$

A v_x -re való korlátozás pedig az előző megoldáshoz hasonlóan kapható.

Spitzer József (Bp., Vörösmarty M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A megoldók jelentős hányada nem végezte el a numerikus számításokat, ami pedig a feladatnak nem elhanyagolható része. A másik gyakori hiba, sokan nem gondolják meg a számítási eredmények fizikai tartalmát.

2. Sok a feleslegesen bonyolult, hosszadalmas megoldás. Törekedjünk a tömörségre, s megjegyzést, kiegészítést csak akkor közöljünk, ha érdeklődésre számot tartó, tanulságos problémát vet fel. A felesleges nyújtás, érdektelen problémák tárgyalása a dolgozat értékét csökkenti.