



(Gaál István cikkében szereplő jelöléseket alkalmazzuk, I. K. M. L. 1968. évi 8–9. szám 165. o.)

a) kapcsolás. Kirchhoff I. törvényét a B csomópontra, II. törvényét pedig az $ABDE$ és a BCD körökre felírva három egyenletet kapunk:

$$(1) \quad i_1(t) = i_2(t) + i_3(t),$$

$$(2) \quad Ri_1(t) + \frac{1}{C}q(t) = U_0 \cos \omega t,$$

$$(3) \quad Li_3'(t) + R_t i_3(t) - \frac{1}{C}q(t) = 0;$$

ahol $q(t)$ a kondenzátor pillanatnyi töltése:

$$(4) \quad i_2(t) = q'(t).$$

Ez a négyismeretlenes egyenletrendszer megoldható. Nekünk nyilvánvalóan csak $i_3(t)$ -re van szükségünk, ezért a többi változót megpróbáljuk algebrai módszerekkel kiejteni. A (2) és (3) egyenletekben vegyük a bennük szereplő mennyiségek változásának a sebességét, (4) felhasználásával:

$$(5) \quad Ri_1'(t) + \frac{1}{C}i_2(t) = -U_0\omega \sin \omega t,$$

$$(6) \quad Li_3''(t) + R_t i_3'(t) - \frac{1}{C}i_2(t) = 0.$$

Kifejezve $i_2(t)$ -t (6)-ból és $i_1(t)$ -t (1)-ből, majd az (5)-be helyettesítve olyan egyenletet kapunk, melyben csak az $i_3(t)$ függvény az ismeretlen:

$$(7) \quad RLCi_3'''(t) + (L + RR_tC)i_3''(t) + (R + R_t)i_3'(t) + U_0\omega \sin \omega t = 0.$$

Keressük az $i_3(t)$ ismeretlen függvényt

$$(8) \quad i_3(t) = I \sin(\omega t + \varphi)$$

alakban. Az idézett cikk alapján

$$(9) \quad i_3'(t) = I\omega \cos(\omega t + \varphi),$$

$$(10) \quad i_3''(t) = -I\omega^2 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$(11) \quad i_3'''(t) = -I\omega^3 \cos(\omega t + \varphi).$$

(7)-be helyettesítve, a $\sin \omega t$ és a $\cos \omega t$ együtthatói el kell, hogy tűnjenek:

$$(12) \quad (R + R_t - \omega^2 RLC) \sin \varphi + \omega(L + RR_tC) \cos \varphi = U_0/I,$$

$$(13) \quad (R + R_t - \omega^2 RLC) \cos \varphi - \omega(L + RR_tC) \sin \varphi = 0.$$

Az áram amplitúdójának értékét a két egyenlet négyzetösszegéből kifejezhetjük, és így az R_t ellenálláson megjelenő feszültség amplitúdója

$$(14) \quad U = I \cdot R_t = \frac{U_0 R_t}{\sqrt{(R + R_t - \omega^2 RLC)^2 + \omega^2 (L + RR_t C)^2}},$$

vagyis

$$(15) \quad U = \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1 \omega^4 + \gamma_2 \omega^2 + \gamma_3}}$$

alakú a feszültség, ahol az α és a γ -k konstansok.

A (13) egyenletből

$$(16) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{R + R_t - \omega^2 RLC}{\omega (L + RR_t C)},$$

így az R_t ellenálláson megjelenő feszültség

$$(17) \quad u_t(t) = U \sin(\omega t + \varphi),$$

ahol U és φ a (14) és (16) egyenletekben adottak.

b) kapcsolás. Kirchhoff I. törvényét a B csomópontra, II. törvényét pedig az $ABEF$, a BCE és a BDE körökre felírva négy egyenletet kapunk:

$$(18) \quad i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) + i_4(t),$$

$$(19) \quad Ri_1(t) + R_t i_4(t) = U_0 \cos \omega t,$$

$$(20) \quad Li'_3(t) + ri_3(t) - R_t i_4(t) = 0,$$

$$(21) \quad \frac{1}{C}q(t) - R_t i_4(t) = 0;$$

valamint tudjuk, hogy

$$(22) \quad i_2(t) = q'(t).$$

Az *a)* kapcsolásnál végzett számításokhoz hasonlóan ez az egyenletrendszer algebrai módszerekkel a következőre redukálható:

$$(23) \quad LRR_t C i_4''(t) + (LR + LR_t + rRR_t C) i_4'(t) + (rR + RR_t + rR_t) i_4(t) + U_0(\omega L \sin \omega t - r \cos \omega t) = 0.$$

Az $i_4(t)$ megoldásfüggvényt keressük a (8)–(9)–(10) képleteknek megfelelő alakban:

$$(24) \quad i_4(t) = I \sin(\omega t + \varphi).$$

(23)-ba helyettesítve $\sin \omega t$ és $\cos \omega t$ együtthatója el kell, hogy tűnjék:

$$(25) \quad (rR + RR_t + rR_t - \omega^2 LRR_t C) \cos \varphi - \omega (LR + LR_t + rRR_t C) \sin \varphi = -\frac{\omega L}{I} U_0,$$

$$(26) \quad (rR + RR_t + rR_t - \omega^2 LRR_t C) \sin \varphi + \omega (LR + LR_t + rRR_t C) \cos \varphi = \frac{r}{I} U_0.$$

A két egyenlet négyzetösszegéből a keresett feszültség amplitúdója:

$$(27) \quad U = IR_t = U_0 R_t \sqrt{\frac{r^2 + \omega^2 L^2}{(rR + RR_t + rR_t - \omega^2 LRR_t C)^2 + \omega^2 (LR + LR_t + rRR_t C)^2}}.$$

Azaz (15)-höz hasonlóan

$$(28) \quad U = \sqrt{\frac{\alpha_1 \omega^2 + \alpha_2}{\gamma_1 \omega^4 + \gamma_2 \omega^2 + \gamma_3}}.$$

(25)-öt r -rel, (26)-ot ωL -lel beszorozva és összeadva megkapjuk a fázisszöveget:

$$(29) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{(R + R_t)(r^2 + \omega^2 L^2) + rRR_t}{\omega RR_t [C(r^2 + \omega^2 L^2) - L]},$$

így az R_t ellenálláson megjelenő feszültség

$$(30) \quad u_i(t) = U \sin(\omega t + \varphi);$$

ahol U és φ a (27) és (29) egyenletekben adottak.

c) kapcsolat. (Az ábra elvi kapcsolási rajz. Valójában az L_{11} , illetve L_{22} önindukciós együtthatók nem függetlenek és nem választhatóak külön az L_{12} , illetve L_{21} kölcsönös indukciós együtthatóktól. Ugyanez volt a helyzet a b) esetben az L önindukciós együtthatójú tekercs r veszteségi ellenállásával is.)

Kirchhoff II. törvényét mind a két körre külön-külön felírjuk ($q_1(t)$ a bal oldali, $q_2(t)$ a jobb oldali kondenzátor töltése):

$$(31) \quad Ri_1(t) + L_{11}i_1'(t) + L_{12}i_2'(t) + \frac{1}{C}q_1(t) = U_0 \cos \omega t,$$

$$(32) \quad R_t i_2(t) + L_{22}i_2'(t) + L_{21}i_1'(t) + \frac{1}{C}q_2(t) = 0,$$

valamint

$$(33) \quad i_1(t) = q_1'(t),$$

$$(34) \quad i_2(t) = q_2'(t)$$

és

$$(35) \quad L_{12} = L_{21}.$$

A töltéseket kiejtve kapjuk, hogy

$$(36) \quad Ri_1'(t) + L_{11}i_1''(t) + L_{12}i_2'(t) + \frac{1}{C}i_1(t) = -U_0\omega \sin \omega t,$$

$$(37) \quad R_t i_2'(t) + L_{22}i_2''(t) + L_{21}i_1'(t) + \frac{1}{C}i_2(t) = 0.$$

Ebből az egyenletrendszerből $i_1(t)$ -t ki kellene ejteni, de ez közvetlenül lehetetlen. Vegyük észre, hogy ha a megoldásokat (8) mintájára

$$(38) \quad i_1(t) = I_1 \sin(\omega t + \varphi)$$

és

$$(39) \quad i_2(t) = I \sin(\omega t + \varphi)$$

alakban keressük, akkor a (8) és (10) egyenletekből láthatóan az

$$(40) \quad i_1''(t) = -\omega^2 i_1(t)$$

és az

$$(41) \quad i_2''(t) = -\omega^2 i_2(t)$$

összefüggések teljesülnek. Ezekkel könnyen megkaphatjuk a kívánt egyenletet:

$$(42) \quad RR_t C^2 i_2''(t) + [(1 - \omega^2 L_{11}C)R_t C + (1 - \omega^2 L_{22}C)RC] i_2'(t) + [(1 - \omega^2 L_{11}C) \cdot (1 - \omega^2 L_{22}C) - \omega^4 L_{12}^2 C^2] i_2(t) + U_0 \omega \sin \omega t = 0.$$

A már ismert technikával kiszámíthatjuk a (39) képletben szereplő I , illetve az U feszültség-amplitúdó értékét, illetve a fázisszög tangensét:

$$(43) \quad U = IR_t = \frac{U_0 R_t L_{12} C^2 \omega^3}{[(1 - \omega^2 L_{11}C)(1 - \omega^2 L_{22}C) - \omega^4 L_{12}^2 C^2]^2 + \omega^2 [(1 - \omega^2 L_{11}C)R_t C + (1 - \omega^2 L_{22}C)RC]^2},$$

azaz (15)-höz és (26)-hoz hasonlóan

$$(44) \quad U = \frac{\alpha \omega^3}{\sqrt{\gamma_1 \omega^8 + \gamma_2 \omega^6 + \gamma_3 \omega^4 + \gamma_4 \omega^2 + \gamma_5}};$$

illetve

$$(45) \quad \tan \varphi = -\frac{\omega [(1 - \omega^2 L_{11}C)R_t C + (1 - \omega^2 L_{22}C)RC]}{(1 - \omega^2 L_{11}C)(1 - \omega^2 L_{22}C) - \omega^4 L_{12}^2 C^2 - \omega^2 R R_t C^2}.$$

Az R_t ellenálláson megjelenő feszültség a (43) és (45) képletekben adott mennyiségekkel

$$(46) \quad u_t(t) = U \sin(\omega t + \varphi).$$

(Több dolgozat alapján)