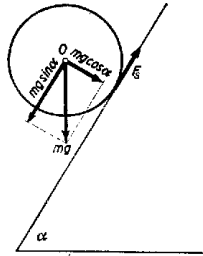


I. megoldás. Az m tömegű, I tehetetlenségi nyomatékú hengerre $mg \sin \alpha$ nagyságú mozgatóerő és F_s súrlódási erő hat (1. ábra).



1. ábra

A test súlypontjának gyorsulását az alábbi mozgásegyenlet határozza meg:

$$(1) \quad ma = mg \sin \alpha - F_s.$$

A súrlódási erő forgatónyomatéka a súlypontra $F_s r$ (r a henger sugara), így a henger β szöggyorsulása a forgómozgás alapegyenlete szerint

$$(2) \quad \beta = F_s r / I.$$

Az (1) és (2) egyenletrendszerben három ismeretlen szerepel (F_s , a és β), ezért még egy összefüggésre van szükségünk. Két eset lehetséges. Ha a súrlódási együttható elég nagy, akkor a test sima legördülést végez. Ennek feltétele az, hogy

$$(3) \quad a = r\beta$$

teljesüljön. Az (1), (2) és (3) egyenletekből

$$F_s = \frac{mg \sin \alpha}{mr^2/I + 1},$$

mely az $I = mr^2/2$ összefüggés felhasználásával $F_s = \frac{1}{3}mg \sin \alpha$ alakra hozható. Ezt a súrlódási erőt az $F_{ny} = mg \cos \alpha$ nyomóerő hozza létre, és így fenn kell, hogy álljon az $F_s \leq \mu F_{ny}$ egyenlőtlenség. Behelyettesítve és $mg \cos \alpha$ -val egyszerűsítve kapjuk, hogy $\mu \geq (1/3) \tan \alpha$. Mivel $\alpha = 60^\circ$ és $\mu = 0,1$ értékek ezt nem elégítik ki, így sima legördülés nem jöhet létre, hanem a henger csúszik a lejtőn. Ekkor a (3) egyenlet nem érvényes, helyette viszont felírhatjuk, hogy a súrlódási erő a maximális

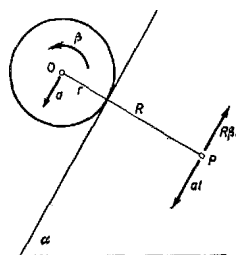
$$(3') \quad F_s = mg \mu \cos \alpha$$

értéket veszi fel. Az (1), (2) és (3') egyenletek megoldása

$$(4) \quad a = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

$$(5) \quad \beta = \frac{2g \mu \cos \alpha}{r}.$$

A pillanatnyi forgástengely a testnek (vagy meghosszabbításának) olyan része, melynek pillanatnyi sebessége nulla. A súlyponttól $OP = R$ távolságra fekvő P pont t idővel a mozgás megkezdése után $v_1 = at$ lejtőirányú és $v_2 = R\beta t$ kerületi sebességgel rendelkezik (2. ábra).



2. ábra

Ezek összege akkor lesz nulla, ha $v_1 = v_2$ és az OP merőleges a lejtő síkjára. A pillanatnyi forgástengely tehát a henger súlypontjától

$$R = \frac{at}{\beta t} = \frac{r}{2\mu}(\operatorname{tg} \alpha - \mu)$$

távolságra helyezkedik el. Numerikus adatokkal $a = 8,0 \text{ m/s}^2$ és $R = 8,2 \text{ r}$.

Varga Zsuzsanna (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Az $a)$ kérdésre megadhatjuk a választ az energiatétel felhasználásával is. A test helyzeti energiája mozgási és forgási energiává alakul, valamint fedezi a súrlódási erő munkáját. A henger t idő alatt $s_1 = at^2/2$, kerületi pontjai a forgás miatt $s_2 = r\beta t^2/2$ utat tesznek meg. A két elmozdulás ellentétes irányú, így a súrlódási erő csak $s_1 - s_2$ az úton végez munkát. A henger súlypontjának sebessége $v = at$, szögsebessége $\omega = \beta t$. Az energiatétel:

$$(6) \quad mgs \sin \alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\mu \cos \alpha \cdot (s_1 - s_2).$$

Figyelembe véve, hogy $\beta = \frac{r\mu mg \cos \alpha}{I}$, ezt (6)-ba helyettesítve az egyszerűsítések után megkapjuk a (4) alatti eredményt.

Dombi Gábor (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Sok megoldó tévesen a hengernek lejtővel érintkező alkotóját tekintette pillanatnyi forgástengelynek. Ez csak sima legördülésnél helyes.