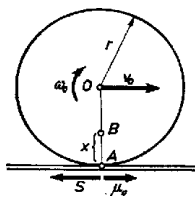


Tekintsük v_0 -t és ω_0 -t a rajz szerinti jelölésben pozitívnak! A korong és a sík A érintkezési pontjának sebessége $u_0 = v_0 - r\omega_0$. v_0 és ω_0 előjele, illetve nagysága szerint sokféle esetet különböztethetünk meg, a további számolásban azonban csak u_0 előjelének van jelentősége.



1. Legyen $u_0 > 0$, vagyis $v_0 > r\omega_0$! Ilyenkor a korongra $S = mg\mu$ súrlódási erő hat (a rajz szerinti irányítással). A testre S erő és Sr forgatónyomaték hat, így a súlypontjának a gyorsulására és a β szöggyorsulásra a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\left. \begin{aligned} S &= -ma, \\ Sr &= I\beta, \\ a &= -g\mu \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{ahol } I \text{ a tehetetlenségi nyomaték} \\ &\text{Ezekből } \beta = mg\mu r/I. \end{aligned}$$

A korong sebessége, illetve szögsebessége t idő múlva:

$$(1) \quad v = v_0 - g\mu t, \quad \text{és}$$

$$(2) \quad \omega = \omega_0 + (mg\mu r/I)t.$$

Az A pont sebessége $u = v - r\omega$, behelyettesítés után:

$$(3) \quad u = u_0 - g\mu t(1 + mr^2/I).$$

Ez a megoldás csak addig érvényes, amíg $u > 0$. Egy bizonyos t_0 időpontban $u = 0$ teljesül, ettől kezdve a korong tiszta legördülést végez. (3) alapján

$$t_0 = \frac{u_0}{g\mu \cdot (1 + mr^2/I)},$$

A korong sebessége ekkor (1) szerint

$$(4) \quad v_{t_g} = v_0 - g\mu t_g = \frac{\frac{mr^2}{I}v_0 + r\omega_0}{1 + \frac{mr^2}{I}}.$$

Határozzuk meg a rajzon B -vel jelölt pillanatnyi forgástengely helyzetét! Bármely két pont B -re vonatkoztatott szögsebessége megegyezik, így az O és A pontoké is. Ha az AB távolságot x -szel jelöljük, akkor a következőt kapjuk:

$$\frac{v}{r-x} = \frac{-u}{x}, \quad \text{honnan} \quad x = \frac{-ru}{v-u}.$$

Helyettesítsük be u és v értékét (3) és (1)-ből:

$$x = \frac{-[u_0 - g\mu t(1 + mr^2/I)]}{r\omega_0 + (mr^2/I)g\mu t} r.$$

Az indulás pillanatában ($t = 0$) $x = \frac{v_0 - r\omega_0}{\omega_0} < 0$ (ha ω_0 pozitív), tehát a forgástengely a sík alatt helyezkedik el, $t = t_0$ -ra pedig $x = 0$, vagyis a forgástengely az A pontig tolódott el. Ettől kezdve valósulhat meg a tiszta legördülés.

2. Ha $u_0 < 0$, akkor a súrlódási erő $-S = mg\mu$. A kiindulási egyenletek:

$$a = g\mu, \quad \beta = -\frac{mg\mu r}{I}.$$

Az 1. eset számolásához hasonlóan járunk el és a következő összefüggéseket kapjuk:

$$t_0 = \frac{-u_0}{g\mu \left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)} = \frac{r\omega_0 - v_0}{g\mu \left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)};$$

$$x = \frac{-\left[u_0 + g\mu t \left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)\right]}{r\omega_0 - \frac{mr^2}{I}g\mu t} r.$$

$t = 0$ -ban $x = -\frac{v_0 - r\omega_0}{\omega_0} > 0$ (ha ω_0 pozitív), tehát a forgástengely A fölött helyezkedik el. $t = t_0$ -ra ismét A lesz a forgástengely, a tiszta legördülés követelményének megfelelően.

3. Ha $u_0 = 0$, akkor már az indulástól kezdve tiszta legördülés valósul meg, e forgástengely pedig mindig az A pont. Ha kihasználjuk, hogy egy homogén korong tehetetlenségi nyomatéka $I = (1/2)mr^2$, akkor láthatóvá válik, hogy eredményeink függetlenek a korong tömegétől. A súrlódási együtthatótól csak t_0 és x függ, a kialakuló végsebesség azonban (4) szerint nem.

Torma Tibor (Budapest, Fazekas M. Gimn., I. o. t.) és
Váradai József (Budapest, Ságvári E. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján