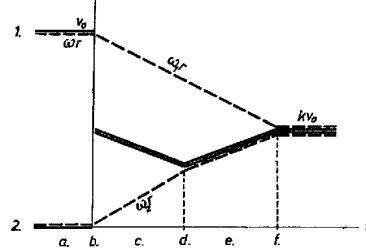


Foglalkozunk az általános esettel. Tartozzon a kezdetben guruló golyóhoz az 1., az eredetileg állóhoz a 2. index. A golyók kerületi sebességei a középponthoz viszonyítva $\omega_1 r$ és $\omega_2 r$. A tehetetlenségi nyomatékok $I_1 = \Phi m_1 r^2$ és $I_2 = \Phi m_2 r^2$, ($\Phi = 0,4$ gömbnél). Az ún. tömeghányadok:

$$k = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad 1 - k = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

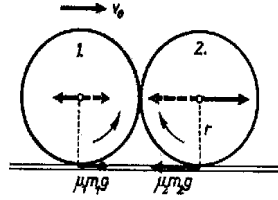
Az ütközés előtti állapotban (a indexszel jelölve) $v_{1a} = v_0$, $v_{2a} = 0$, $\omega_{1a} r = v_0$, $\omega_{2a} r = 0$. Foglalkozunk először azzal az esettel, amikor $\mu_1 m_1 < \mu_2 m_2$: A sebességek időtől való függését az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Közvetlenül az ütközés pillanatában (b) $v_{1b} = v_{2b} = kv_0$; $\omega_{1b} r = v_0$, $\omega_{2b} r = 0$. Ezután (c -állapot) az első golyó forgását a súrlódás fékezi $\mu_1 m_1 g$ erővel, a második golyó forgása a súrlódás következtében gyorsul, itt a súrlódási erő $\mu_2 m_2 g$. Hozzá véve az első golyó középpontjában $\pm \mu_1 m_1 g$, a második golyó középpontjában $\pm \mu_2 m_2 g$ erőket (2. ábra), a két golyó középpontjait együttesen $(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1)g$ erő $(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1)g / (m_1 + m_2)$ gyorsulással lassítja, tehát az együtt maradó golyók centrumainak sebessége:

$$v_{1c} = v_{2c} = kv_0 - \frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \cdot t.$$



2. ábra

Az első golyó forgása lassul, a másodiké gyorsul:

$$\omega_{1c} r = v_0 - \frac{\mu_1 g}{\Phi} \cdot t, \quad \omega_{2c} r = \frac{\mu_2 g}{\Phi} \cdot t.$$

Mindez addig tart, amíg a 2. golyó kerületi sebessége el nem éri a középpontok közös sebességét (d) állapot. Az az időpont:

$$t_{bd} = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{\Phi m_1}{\Phi(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1) + \mu_2(m_1 + m_2)}.$$

Ekkor:

$$v_{1d} = v_{2d} = \omega_{2d} r = v_0 \cdot \frac{\mu_2 m_1}{\Phi(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1) + \mu_2(m_1 + m_2)},$$

az első golyó még mindig köszörül, kerületi sebessége ekkor

$$\omega_{1d} r = v_0 - v_0 \cdot \frac{\mu_1 m_1}{\Phi(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1) + \mu_2(m_1 + m_2)}.$$

Az ezután következő szakaszban (e) a hátsó golyó még mindig köszörül, lenn $\mu_1 m_1 g$ súrlódási erő működik. Ezzel mindkét golyó középpontját gyorsítja és az elöl levő (2) golyót felpörgeti úgy, hogy a golyók továbbra is együtt maradnak és a 2. golyó simán gurul. Most a 2. golyó alsó érintkezési pontján X súrlódási erő lép működésbe. X kiszámítására egyenlővé tesszük a középpontok gyorsulását a 2. golyó kerületi gyorsulásával:

$$\frac{\mu_1 m_1 g - X}{m_1 + m_2} = \frac{X}{\Phi m_2}.$$

Innen

$$X = \frac{\Phi \mu_1 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + \Phi m_2}.$$

Bizonyítható, hogy $X < \mu_2 m_2 g$, tehát keletkezhet ekkora súrlódási erő.

Ebben a szakaszban:

$$v_{1e} = v_{2e} = \omega_{2e} r = v_0 \frac{\mu_2 m_1}{\Phi(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1) + \mu_2(m_1 + m_2)} + \frac{\mu_1 m_1}{m_1 + m_2 + \Phi m_2} g t.$$

t időt most d -állapottól számítjuk. $\omega_1 r$ az eddigi ütemben csökken.

A végső (f) állapot akkor következik be, amikor az 1. golyónál is beáll a sima gördülés. Ennek időtartama a d -állapottól számítva:

$$t_{df} = \frac{v_0}{\mu_1 g} \cdot \frac{m_1 + m_2 + \Phi m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\Phi(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1)}{\Phi(\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1) + \mu_2(m_1 + m_2)}.$$

Ekkor mindkét golyóra nézve létrejön a sima gördülés a közönséges rugalmatlan ütközés (már b -ben meglevő) sebességével:

$$v_{1f} = v_{2f} = \omega_{1f} r = \omega_{2f} r = k v_0.$$

A folyamat teljes ideje:

$$t_{bf} = t_q t_{extbd} + t_{df} = \frac{v_0 \Phi m_2}{\mu_1 g(m_1 + m_2)},$$

függetlenül μ_2 -től.

Ha $\mu_1 m_1 > \mu_2 m_2$, akkor a középpontok sebessége először felgyorsul és először az 1. golyó éri el a sima gördülést, majd a középpontok sebessége újra lassul és a végállapotban valamennyi sebesség újra $k v_0$. Az erre az esetre vonatkozó képletek hasonló módon vezethetők le. A sebességek ismeretében mindkét esetben könnyen számítható a mozgási energiák változása. Ha $\omega_1 m_1 = \mu_2 m_2$, akkor a versenyfeladatban szereplő egyszerű eset áll fenn.

Numerikus adatok néhány esetben.

m_1	100	100	100	300	300
m_2	100	300	100	100	100
μ_1	0,02	0,02	0,04	0,02	0,02
μ_2	0,04	0,02	0,02	0,02	0,04
$k v_0$	$0,5 v_0$	$0,25 v_0$	$0,5 v_0$	$0,75 v_0$	$0,75 v_0$
$t_{bd} v_0 / g$ -ben	50/11	35/6	50/11	25/6	50/11
$t_{bf} v_0 / g$ -ben	10	15	10	15	7,5
$v_{1d} = v_{2d} v_0$ -ban	5/11	5/24	6/11	19/24	17/22