

I. megoldás. Kepler II. törvénye szerint az égitest rádiusvektora egyenlő idők alatt egyenlő területeket sűrol. A T keringési idő alatt sűrolt terület a pályaellipszis területe πab (a a fél nagytengely, b a fél kistengely hossza). A területi sebesség egyrészét $v_1(a-c)/2$, másrészt $v_2(a+c)/2$, ahol v_1 a sebesség napközben, v_2 pedig naptávolban. Így $v_1(a-c)T = v_2(a+c)T = 2\pi ab$. Innen

$$v_1(a-c)T \cdot v_2(a+c)T = (2\pi ab)^2,$$

és mivel

$$a^2 - c^2 = b^2, \quad v_1 \cdot v_2 = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2}.$$

Másrészt

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a+c}{a-c},$$

amiből

$$v_1 = \frac{2a\pi}{T} \sqrt{\frac{a+c}{a-c}}, \quad v_2 = \frac{2a\pi}{T} \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}.$$

Ezután Kepler III. törvénye segítségével kiszámítjuk a pályaellipszis adatait.

$$a^3 : r^3 = (1000 \text{ év})^2 : (1 \text{ év})^2, \quad \text{azaz} \quad a = 100 r, \quad \text{ahol}$$

r a Föld átlagos távolsága a Naptól. A feladat adatai szerint $a-c$ két naprádiusszal egyenlő, s így $a-c = 2R$ és $a+c = 200r - 2R$. $R = 700\,000$ km, $r = 150$ millió km. A számítást elvégezve azt kapjuk, hogy $v_1 = 437$ km/s és $v_2 = 20,4$ m/s.

Szalay Sándor (Debrecen, Kossuth L. gyak. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Először a pályaellipszis mértani adatait kell kiszámítanunk. A fél nagytengelyre felírjuk Kepler III. törvényét, a Földet felhasználva:

$$1^2 : 1000^2 = (150 \text{ millió km})^3 : a^3.$$

Innen $a = 15\,000$ millió km. A napközben $(0,7 + 0,7)$ millió km = 1,4 millió km, tehát az excentricitás $c = (15\,000 - 1,4)$ millió km. A fél kistengely

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{41\,998} \text{ millió km} = 204,9 \text{ millió km}.$$

Napközben az üstökös távolsága a naptól: $a-c = 1,4$ millió km, naptávolban: $a+c = 29\,998,6$ millió km.

Az ellipszis területe $ab = 9,651 \cdot 10^{18} \text{ km}^2$.

$$\text{A területi sebesség } \frac{9,651 \cdot 10^{18} \text{ km}^2}{1000 \text{ év}} = 9,651 \cdot 10^{15} \frac{\text{km}^2}{3,15 \cdot 10^7 \text{ s}} = 3,1 \cdot 10^8 \text{ km}^2/\text{s}.$$

Napközben ez v_1 alapú, $1,4 \cdot 10^6$ km magasságú háromszög területével egyenlő:

$$\frac{v_1 \cdot 1,4 \cdot 10^6 \text{ km}}{2} = 3,1 \cdot 10^8 \text{ km}^2/\text{s}, \quad \text{így} \quad v_1 = 443 \text{ km/s}.$$

Naptávolban ez a háromszög v_2 alapú és magassága

$$29\,998,6 \cdot 10^6 \text{ km},$$

$$\frac{v_2 \cdot 2,999 \cdot 10^{10} \text{ km}}{2} = 3,1 \cdot 10^8 \text{ km}^2/\text{s}, \quad \text{így} \quad v_2 = 0,021 \text{ km/s} = 21 \text{ m/s}.$$

Haber Róbert (Bp., Táncsics M. g. IV. o. t.)

III. megoldás. Az ellipszis csúcsában a görbületi sugár $\varrho = b^2/a$ (lásd K. M. L. 1964. 3.). A centripetális gyorsulást a tömegvonzás hozza létre, ezért $v_1^2/\varrho = fM(a-c)^2$ és $v_2^2/\varrho = fM(a+c)^2$, ahol f a gravitációs állandó és M a Nap tömege, innen v_1 -et és v_2 -t kiszámíthatjuk.

IV. megoldás. Az energiatételt és az $a^3/T^2 = fM/4\pi^2$ ismert összefüggést felhasználva, mivel $v_1/v_2 = (a+c)/(a-c)$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - fM\frac{m}{a-c} = \frac{1}{2}mv_2^2 - fM\frac{m}{a+c},$$

$$v_1 = \frac{2a\pi}{T} \sqrt{\frac{a+c}{a-c}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}} \cdot \frac{2a\pi}{T}.$$

Továbbiakban az előzőkhöz hasonlóan folyik a számítás.