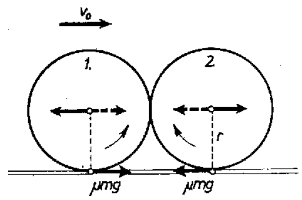
Az ütközés előtt az 1. golyó középpontja v_0 sebességgel halad, és ez a golyó $\omega = v_0/r$ szögsebességgel forog középpontja körül. Forgásának ωr kerületi sebessége v_0, a golyó simán gurul. A 2. golyó középpontja áll, és forgásának szögsebessége 0.



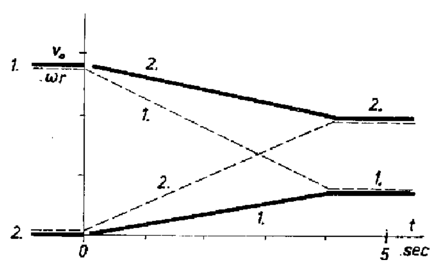
1. ábra

Közvetlenül a rugalmas ütközés után a középpontok sebessége felcserélődik: az 1. golyó középpontja megáll, a 2. golyó középpontja viszont v_0 sebességgel indul el. A forgások szögsebessége első pillanatban még megmarad. Az 1. golyó ωr kerületi sebességgel forog, miközben középpontja áll, ezért az érintkezési pontban μmg előre mutató súrlódási erő lép fel (1. ábra). A középpontban hozzávesszünk $\pm\mu mg$ erőket. Közülük a jobb oldali gyorsítja a golyó középpontját μg gyorsulással, tehát az 1. golyó, amely pillanatnyilag megállt, egyenletesen gyorsuló mozgást kezd végezni, amelynek sebessége:

(1) $$v_1 = \mu g t.$$

A hozzávett két erő közül a bal oldali a súrlódási erővel együtt μmgr forgatónyomatékot ad, amely fékezi a forgást $\beta = \mu mgr/I$ szöggyorsulással (I a tehetetlenségi nyomaték); a kerületi pont lineáris gyorsulása $\beta r = \mu mgr^2/I$. A középponthoz viszonyított forgás kerületi sebessége lassul:

(2) $$v_0 - \frac{\mu g}{I/mr^2} \cdot t.$$



2. ábra

A középpont mozgásának gyorsulása és a kerületi sebesség fékeződése addig tart, amíg (1) és (2) értéke egyenlő nem lesz (2. ábra):

$$\mu g t_0 = v_0 - \frac{\mu g}{I/mr^2} \cdot t_0.$$

A fékeződés t_0 időtartama ebből az egyenletből:

(3) $$t_0 = \frac{v_0}{\mu g} \cdot \frac{I/mr^2}{1 + I/mr^2}.$$

Ezután az 1. golyó simán gurul tovább, középpontjának sebessége és kerületi sebessége egyező, függetlenül μ-től:

(4) $$v_{11} = v_0 \cdot \frac{I/mr^2}{1 + I/mr^2}.$$

Közvetlenül az ütközés után a 2. golyó középpontja v_0 sebességgel halad, miközben a középpont körüli forgás 0. A golyó köszörül, a súrlódási erő hátrafelé irányul, a középpontban hozzávett $\pm\mu mg$ erők közül a bal oldali lassítja a középpont haladását, ezért a 2. golyó középpontjának haladási sebessége:

(5) $$v_2 = v_0 - \mu g t.$$

A középpont körüli forgás gyorsul és a kerületi pont sebessége

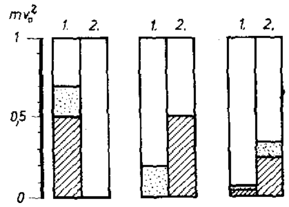
(6) $$\frac{\mu g}{I/mr^2} \cdot t.$$

A középpont haladásának lassulása és a forgás gyorsulása addig tart, amíg a sebességek egyenlővé nem válnak. Ennek időpontja, az (5) és (6) egyenlővé tevéséből adódó egyenlet megoldása szerint egyezik a (3) által t_0-ra kapott eredménnyel. Ezután a 2. golyó is simán gördülve gurul tovább

$$v_{22} = v_0 \cdot \frac{1}{1 + I/mr^2} \tag{7}$$

sebességgel.

Feladatunk számadatai szerint az 1. golyó középpontjának gyorsulása és a 2. golyó középpontjának lassulása 20 $\mathrm{cm/s^2}$, a forgást lassító és gyorsító forgatónyomatékok 10^4din $\cdot$ cm, az ehhez tartozó szöggyorsulások (mivel gömbnél $I = 0{,}4mr^2$) $\beta = 10\ \mathrm{s^{-2}}$, a forgás kerületi sebességének lassulása, illetve gyorsulása 50 $\mathrm{cm/s^2}$, a végállapot elérésének ideje (3) szerint $t_0 = 4$ s és a golyók végső sebességei (4) és (7) szerint $v_{11} = 80$ cm/s, $v_{22} = 200$ cm/s. A végsebességek függetlenek a súrlódási együtthatótól. Bár a 2. golyó utánairamodik az 1. golyónak, sohasem éri el, és távolságuk mindig nagyobb lesz. Kiszámíthatjuk a sima gurulásig megtett utat is: az 1. golyónál $\mu g t_0^2/2 = 160$ cm, a 2. golyónál $v_0 t_0 - \mu g t_0^2/2 = 960$ cm.



3. ábra

A haladó mozgás kinetikus energiája $0{,}5mv_0^2$. A forgáshoz tartozó mozgási energia $0{,}5\omega^2 I = 0{,}5v^2 I/r^2$, ahol v a kerületi sebesség; gömbnél $I = 0{,}4mr^2$, és így a forgáshoz tartozó mozgási energia $0{,}2mv^2$. Az ütközés előtt az 1. golyó mozgási energiája $0{,}5mv_0^2 + 0{,}2mv_0^2 = 0{,}7mv_0^2$, illetve $3\,920\,000 + 1\,568\,000 = = 5\,488\,000$ erg; a 2. golyónak semmiféle mozgási energiája sincs (3. ábra). Közvetlenül az ütközés után az 1. golyónak megmarad a $0{,}2mv_0^2$ forgásból származó mozgási energiája, de a haladó mozgáshoz tartozó $0{,}5mv_0^2$-et átadta a 2. golyónak, mint haladó mozgásának kinetikus energiáját. A végállapotban az 1. golyónak haladásból $2mv_0^2/49 = 0{,}0408mv_0^2 = 320\,000$ erg, forgásból $4mv_0^2/245 = 0{,}0163mv_0^2 = 128\,000$ erg, összesen $2mv_0^2/35 = 0{,}0571mv_0^2 = 448\,000$ erg mozgási energiája van. A 2. golyó mozgási energiája a haladásból $25mv_0^2/98 = 0{,}2551mv_0^2 = 2\,000\,000$ erg, forgásból $5mv_0^2/49 = 0{,}1020mv_0^2 = 800\,000$ erg, összesen $5mv_0^2/14 = 0{,}3571mv_0^2 = 2\,800\,000$ erg. A végállapotban a két golyó együttes mozgási energiája a haladásból $29mv_0^2/98 = 0{,}2961mv_0^2 = 2\,320\,000$ erg, a forgásból $29mv_0^2/245 = 0{,}1181mv_0^2 = 928\,000$ erg, összesen $29mv_0^2/70 = 0{,}4142mv_0^2 = 3\,248\,000$ erg. Hővé alakult $2mv_0^2/7 = 0{,}2858mv_0^2 = 2\,240\,000$ erg, az összes mozgási energia 20/49-ed része.

Jung József (Szeged, Radnóti g. III. o. t.)