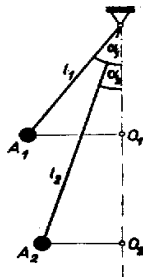


Az ábra A_1 és A_2 pontjainak vízszintes síkon vett vetületei harmonikus rezgőmozgást végeznek, ha a kitérés szöge elég kicsiny.



A mozgásegyenlet a következő:

$$x = AO \cdot \sin(\omega t + \gamma),$$

ahol $\omega = \sqrt{g/l}$ az inga lengési frekvenciája, γ a fázisszög, jelen esetben $\pi/2$, mert a szélső helyzetből indulunk, valamint $AO = l \sin \alpha \approx l \alpha$ az amplitudó. Az ábrából látható, hogy $x = l \sin \beta \approx l \beta$, ahol β a mindenkori kitérés szöge. Innen

$$\beta = \alpha \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \pi/2 \right) = \alpha \cos \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t.$$

A kétféle inga akkor lesz fedésben, ha $\beta_1 = \beta_2$, vagyis

$$(1) \quad \alpha_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l_1}} \cdot t = \alpha_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l_2}} \cdot t.$$

A fenti egyenletet teljes általánosságban algebrai úton nem tudjuk megoldani, de pl. grafikus módszerrel célt érhetünk. Speciális esetekben könnyebb a dolgunk, ilyen az alábbi kettő is.

1. $T_1 = 2T_2$, vagyis $\omega_2 = 2\omega_1$. Minthogy $\cos^2 \omega_1 t = (1 + \cos 2\omega_1 t)/2$, (1) így írható:

$$\frac{1 + \cos 2\omega_1 t}{2} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cos 2\omega_1 t \right)^2,$$

innen

$$\cos 2\omega_1 t = \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^2} \pm \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^2} + 2}.$$

Legyen $\alpha_1 = \alpha_2$, ekkor $\cos 2\omega_1 t = 1; -1/2$, vagyis

$$2\omega_1 t = 0 + 2k\pi, \quad t_a = k \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{k}{2} \cdot T_1,$$

illetőleg

$$\begin{aligned} 2\omega_1 t &= \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, & t_{b1} &= (3k+1) \frac{\pi}{3\omega_1} = \frac{3k+1}{6} \cdot T_1, \\ 2\omega_1 t &= \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, & t_{b2} &= (3k+2) \frac{\pi}{3\omega_1} = \frac{3k+2}{6} \cdot T_1. \end{aligned}$$

Eszerint az ingák sorban a

$$0; \quad \frac{T_1}{6}; \quad \frac{T_1}{3}; \quad \frac{T_1}{2}; \quad \frac{2T_1}{3}; \quad \frac{5T_1}{6}; \quad T_1; \quad \dots$$

időpontokban lesznek fedésben.

2. $T_1 = 3T_2$, ekkor (1)-ből a $\cos 3\omega_1 t = 4 \cos^3 \omega_1 t = 3 \cos \omega_1 t$ azonosság fölhasználásával kapjuk:

$$\alpha_1 \cos \omega_1 t = \alpha_2 (4 \cos^3 \omega_1 t - 3 \cos \omega_1 t).$$

Innen egyrészt $\cos \omega_1 t = 0$, másrészt $\cos \omega_1 t \neq 0$ -val végigosztva

$$\begin{aligned} 4\alpha_2 \cos^2 \omega_1 t &= \alpha_1 + 3\alpha_2, \\ \cos \omega_1 t &= \pm \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{\alpha_1}{4\alpha_2}}. \end{aligned}$$

Ha $\alpha_1 = \alpha_2$, $\cos \omega_1 t = \pm 1$, és

$$\begin{aligned}\omega_1 t &= 2k\pi, & t_{b1} &= 2k \frac{\pi}{\omega_1} = k \cdot T_1, \\ \omega_1 t &= (2k+1)\pi, & t_{b2} &= (2k+1) \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{2k+1}{2} \cdot T_1,\end{aligned}$$

ehhez hozzávéve az előbb kizárt esethez tartozó megoldást:

$$t_a = (2k+1) \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{2k+1}{4} \cdot T_1,$$

kapjuk a fedés időközeire:

$$0; \quad \frac{T_1}{4}; \quad \frac{T_1}{2}; \quad \frac{3T_1}{4}; \quad T_1; \quad \dots$$

Két fedés között tehát $T_1/4$ idő telik el.

Herendi Ágnes (Bp. Toldy F. g. IV. o. t.)
dolgozata alapján