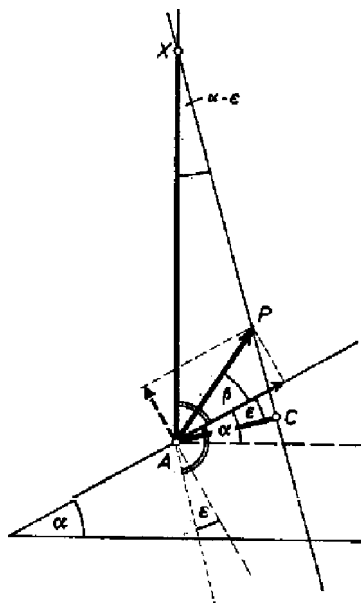


**I. megoldás.** A megoldás történhet a Lapok 1966. évi 7. (1966/10.) számában a 85. oldalon olvasható eljárás szerint.  $P$  erő lejtőre merőleges összetevője  $P \sin \beta$  (ezzel ellentétes irányú a lejtő anyaga által kifejtett kényszererő). A tárgy és a lejtő között az összenyomó erő  $mg \cos \alpha - P \sin \beta$  és a surlódási erő  $\mu(mg \cos \alpha - P \sin \beta)$ . Leeresztéskor a surlódási erő segít tartani a tárgyat, tehát  $P$  erő lejtőmenti összetevője egyenlő a súly lejtőmenti összetevőjének és a surlódási erőnek a különbségével (1. ábra):

$$P \cos \beta = mg \sin \alpha - \mu(mg \cos \alpha - P \sin \beta).$$



1. ábra

Innen az egyensúlyban tartáshoz szükséges erő:

$$(1) \quad P = mg \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \beta - \mu \sin \beta}.$$

Bevezetve a surlódási határszöget,  $P = \tan \varepsilon$  segítségével:

$$(2) \quad P = mg \frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos(\beta + \varepsilon)}.$$

Természetesen csak  $\alpha > \varepsilon$  esetében vizsgáljuk a kérdést, különben a test lefelé vonszolásához kellene erőt kifejtenuünk.

Keressük az egyensúlyban tartáshoz szükséges  $P$  erők végpontjainak mértani helyét, ha  $\beta$  szöget változtatjuk.  $P$  erő akkor a legkisebb, ha  $\cos(\beta + \varepsilon) = 1$ , vagyis  $\beta + \varepsilon = 0$ , tehát  $\beta = -\varepsilon$ . Tehát a kötelet  $\varepsilon$  szöggel kell a lejtő alá irányítani. A legkisebb lehetséges erő  $AC = mg \sin(\alpha - \varepsilon)$ . Az  $ACX$  derékszögű háromszögben az  $X$ -nél levő szög  $\alpha - \varepsilon$ , tehát  $AX = mg$ , a tárgy súlya. Tetszőleges  $\beta$  irányú erő végpontját úgy kapjuk meg  $P$  erő (2) képlete szerint, hogy a minimális  $AC$  erőt elosztjuk  $\beta + \varepsilon$  cosinusával. Tehát  $P$  végpontjainak mértani helye a  $C$ -n átmenő,  $AC$ -re merőleges (és  $X$ -en átmenő) egyenes.

$\beta$  szög számára a megengedett szögtartomány most is a lejtő felett (pozitív irányban)  $0^\circ$ -tól  $90^\circ - \alpha$ -ig terjed. Ennél nagyobb szögnél  $P$  erő leemelné a testet a lejtőről. A lejtő alá fordulva (negatív irányban)  $\beta$  szög abszolút értéke  $0^\circ$ -tól  $90^\circ + \varepsilon$ -ig terjed. Ennél nagyobb abszolút értékű  $\beta$  szögnél  $P$  erő végpontja nem kerülhetne a mértani helyre. Ábránkon a kettős ívű szögek jelentik azokat a határokat, amelyeken belül  $\beta$  változhat.

(Helyreigazítás. 1966. évi 7. számban a 85. oldalon könnyen észrevehető módon az 5. ábra legfelső pontja  $X$  és a 6. ábrán az  $X$ -nél levő szög  $\alpha + \varepsilon$ .)

**II. megoldás.** Mivel a test egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, a testre ható erők eredőjének 0-nak kell lennie. Jelöljük a kényszererőt  $K$ -val, akkor a csúszás folytán a surlódási erő  $\mu K$  és a lejtőn felfelé mutat. Felírjuk azt, hogy a lejtőre ható erők eredője zérus a lejtőre merőlegesen és a lejtő irányában:

$$\begin{aligned} mg \cos \alpha - K - P \sin \beta &= 0, \\ mg \sin \alpha - \mu K - P \cos \beta &= 0. \end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldjuk  $K$ -ra és  $P$ -re:

$$(3) \quad K = mg \cos \alpha - P \sin \beta,$$

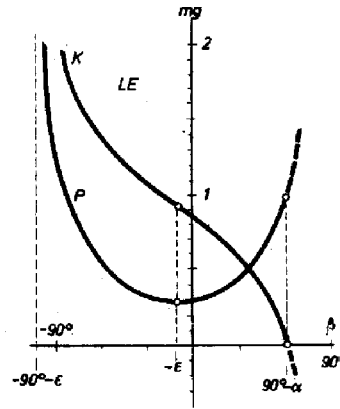
$$P = mg \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \beta - \mu \sin \beta} = mg \frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos(\beta + \varepsilon)}. \quad (1), (2)$$

Mivel csak olyan lejtőkkel foglalkozunk, amelyeknél  $\alpha > \varepsilon$ , (2) számlálója biztosan pozitív. Pozitív  $P$  erőt akkor fogunk kapni, ha a nevező is pozitív.

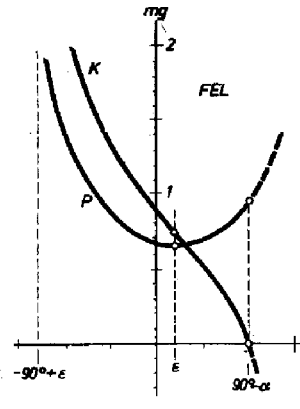
Ez azt jelenti, hogy lefelé mutató (negatív)  $\beta$  szögek abszolút értéke  $90^\circ + \varepsilon$ -ig terjedhet, mert akkor  $\beta + \varepsilon$  nem lépi túl a  $90^\circ$ -ot. Felfelé mutató (pozitív)  $\beta$  szögek esetében meg kell vizsgálnunk, milyen határok között marad a kényszererő pozitív. A (2) szerinti eredményt (3)-ba helyettesítve, átalakítással kapjuk a kényszererő számára:

$$K = mg \frac{\cos \varepsilon \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\beta + \varepsilon)}.$$

A kényszererő addig pozitív, amíg  $\alpha + \beta$  nem több  $90^\circ$ -nál. Ábránkra tekintve látjuk, ez azt jelenti, hogy felfelé irányuló  $\beta$  szög szára nem kerülhet a függőlegestől balra.



2/a. ábra (a 656. feladathoz)



2/b. ábra (az 1966. évi tanulmányi verseny 2. feladatához)

Az áttekintést megkönnyíti, ha ábrázoljuk  $P$  egyensúlyozó erő és  $K$  kényszererő függését  $\beta$  szögtől (2. ábra baloldali rajza).  $P$  húzóerő görbéje  $\varepsilon$  szöggel balra csúsztatott secans-függvény,  $K$  kényszererő görbéje pedig  $90^\circ + \varepsilon$  szöggel balra csúsztatott és felemelt cotangens-függvény. Az ábrák vizsgálatából is látszik, hogy  $\beta$  számára  $-(90^\circ + \varepsilon)$  és  $90^\circ - \alpha$  közötti értékek lehetségesek.

Ugyanezzel a gondolatmenettel tárgyalható az 1966. évi tanulmányi verseny II. fordulójának 2. feladata is, amikor a tárgyat fel kellett húzni a lejtőn. Ekkor a húzóerő és a kényszererő számára adódó eredmények:

$$P = mg \frac{\sin(\alpha + \varepsilon)}{\cos(\beta + \varepsilon)}, \quad K = mg \frac{\cos \varepsilon \cos(\beta + \alpha)}{\cos(\beta - \varepsilon)}.$$

$\beta$ -től való függésüket a 2. ábra jobboldali rajza tünteti fel. Most  $P$  secans görbéje  $\varepsilon$  szöggel,  $K$  cotangensgörbéje  $90^\circ - \varepsilon$  szöggel jobbra van eltolva.  $\beta$  számára az érvényességi terület  $-(90^\circ - \varepsilon)$  és  $90^\circ - \alpha$  között van.