

a) Az impulzus (mozgásmennyiség) megmaradásának törvénye értelmében a rendszer tömegközéppontja $v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2}$ sebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, mivel külső erő nem hat. Így egyszerre két ekvivalens inerciarendszerben vizsgálhatjuk a mozgást: a földhöz rögzített, ún. laboratóriumi koordinátarendszerben, amelyhez viszonyított koordinátákat és sebességeket kis betűvel jelöljük, és a tömegközépponthoz rögzített koordinátarendszerben, amelyben a mozgás leírására a nagy betűket használjuk. A két rendszer origója a $t = 0$ pillanatban essen egybe. Ekkor az egyes tömegek sebessége a tömegközépponti rendszerben:

$$V_1 = v_1 - v_0 = \frac{v_1 - v_2}{2},$$

$$V_2 = v_2 - v_0 = \frac{v_2 - v_1}{2} = -V_1.$$

Ebben a koordinátarendszerben a rugó középpontja mozdulatlan, akár rögzíthetjük is. Olyan, mintha a tömegeket az origóba erősített $L/2$ nyugalmi hosszúságú rugóhoz kötöttük volna, amelynek direkciós ereje $2D$ (ugyanis a fele hosszúságú rugót ugyanakkora erő csak felére nyújtja meg). A szimmetria miatt elegendő csak az m_1 tömeggel foglalkozni, mert m_2 mozgását (-1) -gyel való szorzással kapjuk (a tömegközépponti rendszerben).

A testre az $X_1 = L/2$ pontban nem hat erő, de ebből kimozdítva $P = -2D(X_1 - L/2)$ erő hat rá, amelynek hatására $\omega = \sqrt{\frac{2D}{m}}$ körfrekvenciájú harmonikus rezgőmozgás jön létre, ennek egyenlete:

$$X_1(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + L/2,$$

$$V_1(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi).$$

Mivel m_1 a $t = 0$ pillanatban $X_1(0) = l_0/2$ helyen tartózkodott, és sebessége $V_1(0) = (v_1 - v_2)/2$ volt, ezért a behelyettesítés után A -ra és φ -re megoldva az egyenleteket, a rezgés amplitúdója

$$A = \sqrt{\left(\frac{l_0 - L}{2}\right)^2 + \frac{m}{2D} \left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right)^2},$$

fázisszöge:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{l_0 - L}{2A}\right).$$

A feladat numerikus adataival:

$$\omega = \sqrt{\frac{2D}{m}} = 2 \text{ s}^{-1}, \quad v_0 = 6 \text{ cm/s}, \quad A = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ.$$

A laboratóriumi rendszerre visszatérve:

$$x_1(t) = X_1(t) + v_0 t = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{L}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2} t,$$

$$x_2(t) = X_2(t) + v_0 t = -A \sin(\omega t + \varphi) - \frac{L}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2} t,$$

$$v_1(t) = V_1(t) + v_0 = A\omega \cos(\omega t + \varphi) + \frac{v_1 + v_2}{2},$$

$$v_2(t) = V_2(t) + v_0 = -A\omega \cos(\omega t + \varphi) + \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

b) Tegyük fel, hogy m_1 a h út megtétele után τ pillanatban ütközik, ekkor:

$$h + \frac{l_0}{2} = A \sin(\omega \tau + \varphi) + \frac{L}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2} \tau.$$

Ez az egyenlet elvileg megoldható τ -ra. Ekkor a sebesség:

$$v_1(\tau) = A\omega \cos(\omega \tau + \varphi) + \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

A végtelen tömegű falba való ütközés után m_1 sebessége az ellentettjére változik, de m_2 -é változatlan marad, tehát:

$$v'_1 = -A\omega \cos(\omega \tau + \varphi) - \frac{v_1 + v_2}{2},$$

$$v'_2 = -A\omega \cos(\omega \tau + \varphi) + \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

A rugó hossza ebben a pillanatban:

$$l'_0 = x_1 - x_2 = 2A \sin(\omega \tau + \varphi) + L.$$

A tömegközéppont sebessége az ütközés után:

$$v'_0 = \frac{v'_1 + v'_2}{2} = -A\omega \cos(\omega\tau + \varphi),$$

ami azt jelenti, hogy az ütközés után egy, a földhöz képest megváltozott sebességű tömegközépponti koordinátarendszert kell használni.

Ezzel a feladatot visszavezettük az előzőre, csak most $t = 0$ helyett $t = \tau$ pillanatban ismerjük a rendszer állapotát, vagyis most kezdőfeltételként a vesszőtlen mennyiségek helyett a vesszősekkel kell számolni.

Így a numerikus számolásnál csak τ meghatározása jelent problémát, ugyanis τ nem állítható elő algebrailag zárt alakban, viszont tetszőleges pontossággal meghatározható. A továbbiakban egy igen egyszerű közelítést fogunk alkalmazni.

Behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk arról, hogy 10 teljes rezgést végezhet a rendszer ütközés nélkül. Mivel egy rezgés ideje $T = \pi$ s, ezért bevezetve $\tau' = \tau - 10$ új változót, az egyenlet így alakul:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{2} + 60\frac{3}{4}\pi + \frac{9}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left[2(\tau' + 10\pi) - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{10}{2} + 6(\tau' + 10\pi),$$

ebből

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(2\tau' - \frac{\pi}{4} \right) + 6\tau'.$$

Mivel $\tau' = \frac{5}{24}\pi$ esetén $\delta = 2\tau' - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$, és ekkor az egyenlet jobb oldala már meghaladja a baloldalt, ezért a megoldás $0 < \delta < 30^\circ$ tartományban lesz, ahol közelítőleg

$$\sin \delta = \sin \left(2\tau' - \frac{\pi}{4} \right) \approx 2\tau' - \frac{\pi}{4}.$$

Ezzel megoldva az egyenletet: $\delta \approx 0,28$, ill. $\tau' = \left(0,14 + \frac{\pi}{8} \right)$ s.

A radiánt fokra átszámítva: $\delta \approx 16,1^\circ$, ennek sinusa: $\sin 16,1^\circ \approx 0,276$, vagyis közelítő feltevésünk százalék pontos-sággal teljesül. Ezzel a $\tau = 10\frac{1}{8}\pi + 0,14$ -gyel számolva:

$$\begin{aligned} v'_1 &\approx -7,36 \text{ cm/s}, & v'_2 &\approx 4,64 \text{ cm/s}, & v'_0 &\approx -1,36 \text{ cm/s}, \\ l'_0 &\approx 10,55 \text{ cm}, & A' &\approx 3 \text{ cm}; & \varphi' &= \arcsin \frac{2A \sin(\omega\tau + \varphi)}{2A'} = \\ & & & & &= \begin{cases} +0,066 + 2k\pi \\ -0,066 + (2k\pi + 1)\pi, \end{cases} \end{aligned}$$

ahol $\varphi' = \pi - 0,066$ értéket kell venni, mert csak így lesz v'_1 negatív. (Érdemes megjegyezni, hogy az ütközés hatására „fordított” fázisban folytatódik a rezgés. (A mozgás további részét vizsgálva látszik, hogy a rendszer újabb ütközés nélkül megindul visszafelé, de a visszafelé haladás v'_0 sebessége jóval kisebb, mert az energia nagyrészt rezgési energiává alakult.

c) 1. Ha az ütközéskor, τ pillanatban a rugó hossza maximális: $l' = x_1 - x_2 = L + 2A$, akkor a sebességek:

$$v_1(\tau) = v_2(\tau) = v_0.$$

Az ütközés után: $v'_1 = -v_0$, $v'_2 = v_0$ és $v'_0 = 0$.

$$\text{Ebből: } A' = \sqrt{A^2 + \frac{m}{2D}v_0^2} \text{ és } \varphi' = \arcsin \frac{A}{A'}$$

Vagyis a tömegközéppont leáll, és egy nagyobb amplitúdójú rezgőmozgás kezdődik. A rugó először összenyomódik, majd mikor újra l' hosszúságúra nyúlik, a sebességek $v''_1 = v_0$ és $v''_2 = -v_0$ lesznek. Ekkor m_1 ütközik, és az ütközés utáni sebességek:

$$v'''_1 = -v_0 \text{ és } v'''_2 = -v_0.$$

Vagyis a rendszer az eredeti sebességgel és rezgési amplitúdóval megindul visszafelé.

2. Ha τ pillanatban $x_1 - x_2 = L - 2A$, akkor lényegében ugyanaz történik, mint előbb, csak ekkor a tömegközéppont leállásának ideje egy fél periódussal kisebb.

3. Ha τ pillanatban $x_1 - x_2 = L$, akkor $\cos(\omega\tau + \varphi) = \pm 1$, a sebességek pedig $v_1 = \pm A\omega + v_0$ és $v_2 = \mp A\omega + v_0$. Ütközés után:

$$v'_1 = \mp A\omega - v_0, \quad v'_2 = \mp A\omega + v_0, \quad v'_0 = \mp A\omega.$$

Vagyis a rezgési és haladási energia felcserélődik.

Mivel A , ω és v_0 arányától függően több alesetet kellene végignézni, ezért ennek részletezésétől egyelőre eltekintünk, már csak azért is, mert lehet, hogy egy külön feladat tárgya lesz, ugyanis a megoldást beküldők egyike sem vizsgálta meg mélyebben ezt a kérdést.

Rácz Miklós (honvéd),
Gnädig Péter (I. é. fizikus, Budapest)