

A munkavégzés függ attól, hogy milyen, egymáshoz viszonyítva egyenletes sebességgel mozgó koordinátarendszerekben nézzük. Ebben a példákban a vízhez képest evezünk, tehát a végzett munkát a vízhez rögzített koordinátarendszerben kell felírni. Nem érdekel bennünket az a munka, amelyet a folyó víz végez.

A közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos; $F = kv^2$, k az arányossági tényező.

Számítsuk ki, hogy az alatt, amíg a csónak a kiindulási helyére visszaér, mekkora utat tesz meg a vízhez képest. A folyón felfelé menve a parthoz viszonyított sebességünk $v - c$, ezzel s utat teszünk meg, ehhez

$$t_f = \frac{s}{v - c}$$

idő szükséges. Lefelé a sebesség $v + c$, az idő

$$t_l = \frac{s}{v + c}.$$

Az összeitű

$$t_f + t_l = \frac{s}{v - c} + \frac{s}{v + c} = \frac{2sv}{v^2 - c^2},$$

és mivel a folyóhoz képest v -vel haladunk, az út a folyóhoz rögzített koordinátarendszerben $S = \frac{2sv^2}{v^2 - c^2}$. A végzett munka:

$$L = PS = 2sk \frac{v^4}{v^2 - c^2}.$$

A feladatban a $\frac{v^4}{v^2 - c^2}$ kifejezés minimumát kell megkeresni. Legyen $v^2 = c^2 x$, ekkor

$$\begin{aligned} \frac{v^4}{v^2 - c^2} &= c^2 \frac{x^2}{x - 1} = c^2 \frac{x^2 - 1 + 1}{x - 1} = c^2 \frac{(x - 1)(x + 1) + 1}{x - 1} = \\ &= c^2 \left((x + 1) + \frac{1}{x - 1} \right) = c^2 \left[(x - 1) - 2 + \frac{1}{x - 1} + 4 \right] = c^2 \left[\left(\sqrt{x - 1} - \frac{1}{\sqrt{x - 1}} \right)^2 + 4 \right]. \end{aligned}$$

Ennek akkor van minimuma, ha a négyzet nulla. Ekkor:

$$\sqrt{x - 1} = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}, \quad x - 1 = 1, \quad x = 2, \quad \text{azaz} \quad v^2 = 2c^2.$$

Tehát a keresett sebesség: $v = \sqrt{2}c$.

Behelyettesítve a $c = 1,5$ m/s számértéket $v = 2,1$ m/s.

Takács László (Sopron, Széchenyi I. g. III. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A feladat megoldásában v kiszámításánál nem szerepel az s , tehát ez a sebesség független az úttól, és csak a folyó sebességétől függ.