

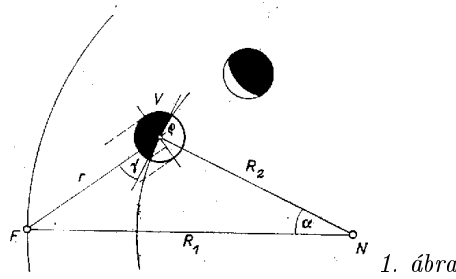
A nagy távolságok folytán a Nap és a bolygók saját rádiusza elhanyagolható egymástól mért távolságaik mellett. $r = FV$ a Föld–Vénusz távolság, $FN = R_1$, $VN = R_2 = 0,72R_1$, ϱ a Vénusz rádiusza (1. ábra). A Vénusz helyzetét vagy α szög (változik 0° -tól 180° -ig), vagy r távolság (változik $R_1 - R_2$ és $R_1 + R_2$ között) határozza meg. α és r összefüggése:

$$(1) \quad r = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos \alpha},$$

illetve:

$$(2) \quad \cos \alpha = \frac{R_1^2 + R_2^2 - r^2}{2R_1R_2},$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2r^2(R_1^2 + R_2^2) - (R_1^2 - R_2^2)^2 - r^4}}{2R_1R_2}.$$



1. ábra

A Vénusz a Földről nézve $\pi\varrho^2$ területű körnek látszik, amelyen a sötét és világos rész határvonala egy ellipszis $\varrho \sin \gamma$ féltengelyekkel; ennek az ellipszisnek a területe $\pi\varrho \cdot \varrho \sin \gamma = \pi\varrho^2 \sin \gamma$. A fényes sarló területe a félkör és a félellipszis területének különbsége:

$$(3) \quad \frac{\pi\varrho^2}{2} - \frac{\pi\varrho^2 \sin \gamma}{2} = \frac{\pi\varrho^2(1 - \sin \gamma)}{2}.$$

Szükségünk van arra, miként függ γ r -től és α -tól. A sinus-tétel alapján:

$$\frac{\sin(90^\circ + \gamma)}{\sin \alpha} = \frac{R_1}{r},$$

vagyis $\cos \gamma = R_1 \sin \alpha / r$ és $\sin \gamma = \sqrt{1 - R_1^2 \sin^2 \alpha / r^2}$. Azután (1) és (2) felhasználásával:

$$\sin \gamma = \frac{R_1 \cos \alpha - R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos \alpha}},$$

illetve:

$$(4) \quad \sin \gamma = \frac{R_1^2 - R_2^2 - r^2}{2R_2r}.$$

A látszólagos fényesség egyenesen arányos a sarló területével és fordítva arányos a távolság négyzetével:

$$F = k \cdot \frac{\pi\varrho^2(1 - \sin \gamma)}{2r^2} = K \cdot \frac{1 - \sin \gamma}{r^2}.$$

Felhasználva a (4) alatti értéket, megkapjuk a látszólagos fényesség függését a távolságtól:

$$F = \frac{K}{2R_2} \cdot \frac{(r + R_2 + R_1) \cdot (r + R_2 - R_1)}{r^3}.$$

A feladatunk első kérdésében szereplő 45 millió km-es távolságot r helyébe helyettesítve a $K/2R_2$ mellett álló szorzó értéke $101/10\,125 = 0,00997$; a második kérdésben szereplő 60 millió km behelyettesítésének eredménye $53/2000 = 0,0265$. Tehát a második esetben, amikor a Vénusz távolabb van, akkor nagyobb a látszólagos fényessége $4293/1616 = 2,656$ arányban.

Megjegyzés. Ha egy gömb felszínének minden pontja minden irányban egyenlő mértékben sugároz fényt, akkor távolról nézve egyenletes fénysűrűségű kört látunk. Ugyanis amilyen mértékben ferdül a felület oldalt, olyan mértékben nagyobbodik is területe. Erre példa egy opálgömb-lámpa és a Nap. Feladatunk szövege sugalmazta ezt az esetet. Azonban ha egy megoldó világító felületnek a Vénuszfelszín megvilágított gömbkétszögét számította, megoldását elfogadtuk, mert a kérdés lényegét ez nem érinti.

Feltűnő módon a megoldók nem keresték függvényszerűen a Vénusz látszólagos fényességének a helytől való függését. Végző eredményünk szerint az r -től való függés könnyen ábrázolható, de tanulságosabb az α -tól való függés vizsgálata, mert α arányos az idővel. Vagy az (1) alatti eredményt helyettesítjük végeredményünkbe, vagy célszerűbben különböző α értékekhez tartozó r -ek táblázatát készítjük el és azután számolunk végeredményünkkel. A 2. ábra a látszólagos fényesség α -tól való függését tünteti fel, de a tengely alatt a távolságok tájékoztató értékei is fel vannak tüntetve. A görbén keresztek jelölik meg a feladat kérdéseiben szereplő értékpárokat.

