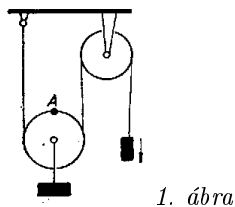
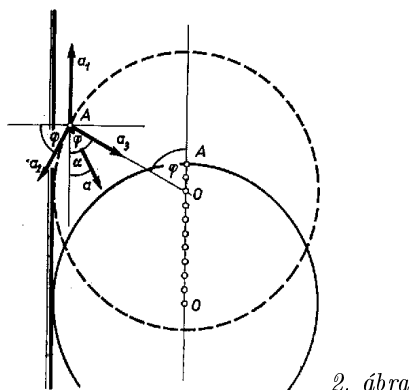


A mozgócsiga középpontjának felfelé feltételezett gyorsulása $a_0 = 0,4 \text{ m/s}^2$ (1. ábra). Feladatunkat most már úgy értelmezhetjük, hogy függőleges falon felfelé gurul egy henger, a fallal csúszásmentesen érintkezve. A henger középpontjának gyorsulása a_0 . Mennyi az A pont gyorsulása az indulás után 1,5 másodperccel?



1. ábra



2. ábra

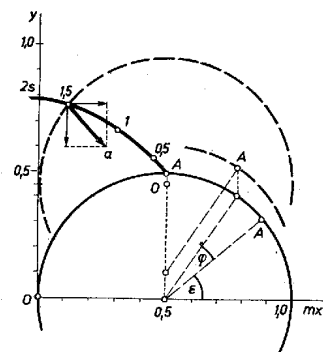
Az A pont a henger középpontjával együtt gyorsul felfelé $a_1 = a_0 = 0,4 \text{ m/sec}^2$ gyorsulással (2. ábra). A kerületi sebesség egyenlő a középpont (egyenletesen változó) sebességével, ezért az A pont az érintő irányában, az érintő mentén előre mutató $a_2 = a_1 = 0,4 \text{ m/s}^2$ gyorsulással is rendelkezik. Az A pont harmadik gyorsulásösszetevője $a_3 = v^2/R$ centripetális gyorsulás a középpont felé irányulva. Az A pont kerületi sebessége $v = a_2 t = 0,4 \cdot 1,5 = 0,6 \text{ m/s}$, ezért $a_3 = 0,36/0,5 = 0,72 \text{ m/s}^2$.

A három gyorsulásösszetevőt vektoriálisan kell összeadnunk. A mozgócsiga középpontjára vonatkoztatott szöggyorsulás $\beta = a_2/R = 0,4/0,5 = 0,8 \text{ s}^{-2}$. A t másodperc alatt létrejövő szögelfordulás $\varphi = \beta t^2/2 = 0,9$ radián $= 51,6^\circ$. Az a_1 gyorsulás vízszintes összetevője 0, függőleges összetevője $0,4 \text{ m/s}^2$. Az a_2 gyorsulás vízszintes összetevője $a_2 \cos 51,6^\circ = 0,249 \text{ m/s}^2$ balra; függőleges összetevője $a_2 \sin 51,6^\circ = 0,313 \text{ m/s}^2$ lefelé irányítva. Az a_3 vízszintes összetevője $a_3 \sin 51,6^\circ = 0,564 \text{ m/s}^2$ jobbra mutatón, függőleges összetevője $a_3 \cos 51,6^\circ = 0,447 \text{ m/s}^2$ lefelé irányulva. Ezek szerint az eredő gyorsulás vízszintes összetevője az $a_x = (0,564 - 0,249) \text{ m/s}^2 = 0,315 \text{ m/s}^2$ jobbra; függőleges összetevője $a_y = (0,4 - 0,313 - 0,447) \text{ m/s}^2 = -0,360 \text{ m/s}^2$ lefelé. Az eredő gyorsulás nagysága $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 0,478 \text{ m/s}^2$, az irányát meghatározó, a függőlegestől lejjel jobbra mutató α szögre érvényes, hogy

$$\text{tg } \alpha = \frac{a_x}{a_y} = 0,8750, \quad \alpha = 41,19^\circ.$$

Tüttő Péter (Budapest, Eötvös g. IV. o. t.) dolgozata alapján

Több megoldó úgy értette és oldotta meg a feladatot, mintha az A pont a mozgás megindulása után 1,5 másodperc múlva jutna a mozgócsiga tetőpontjára. Ezeket a megoldásokat is elfogadtuk.



3. ábra

Megjegyzés. Meghatározhatjuk A pont pályáját is. Helyezzük el a koordinátarendszer origóját a mozgás kezdetkor a mozgócsiga és a baloldali kötél érintkezési pontjába (3. ábra). Az A pont helyzetét az indulás pillanatában a mozgócsiga középpontjából a feléje mutató rádiusz ε szöge határozza meg. t idő múlva a kör középpontja $a_1 t^2/2 = 0,2t^2$ magasságba emelkedik és a feléje mutató rádiusz $\varphi = \beta t^2/2 = 0,4t^2$ radiánnyi, vagyis $22,92t^2$ foknyi szöggel fordul el. Ezért t pillanatban A pont koordinátái:

$$\begin{aligned}x &= R + R \cos(\beta t^2/2 + \varepsilon), \\y &= a_1 t^2/2 + R \sin(\beta t^2/2 + \varepsilon).\end{aligned}$$

A mi esetünkben és fokokban számolva:

$$\begin{aligned}x &= 0,5 + 0,5 \cos(22,92t^2 + \varepsilon), \\y &= 0,2t^2 + 0,5 \sin(22,92t^2 + \varepsilon).\end{aligned}$$

Ezek a függvények a kör bármely pontjának ún. cikloisz pályáját adják meg paraméteres alakban. Az ε nagysága attól függ, hogy a kör mely pontjáról van szó. Ha $t = 0$ -kor A pont koordinátái $x = R$ és $y = R$, akkor egyenleteinkből látható, hogy $22,92 \cdot 0^2 + \varepsilon = 90^\circ$, tehát $\varepsilon = 90^\circ$. Az ekkor keletkező pályát és a gyorsulást a 3. ábra mutatja ezekkel a képletekkel számolva:

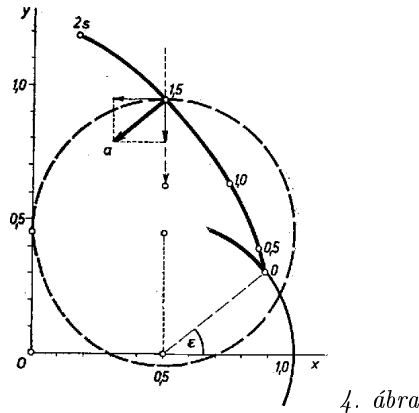
$$\begin{aligned}x &= 0,5 + 0,5 \cos(22,92t^2 + 90), \\y &= 0,2t^2 + 0,5 \sin(22,92t^2 + 90).\end{aligned}$$

Látható, hogy a gyorsulás a pálya homorú oldala felé irányul; mivel hátrahajlik, az érintőleges gyorsulás fékez.

Ha A pont $t = 1,5$ s-kor éri el az $x = R$ és $y = 0,2 \cdot 1,5^2 + R$ koordinátákat, akkor egyenleteink szerint ismét $22,92 \cdot 1,5^2 + \varepsilon = 90^\circ$, így $\varepsilon = 38,43^\circ$, és a pályát megadó függvények:

$$\begin{aligned}x &= 0,5 + 0,5 \cos(22,92t^2 + 38,43^\circ), \\y &= 0,2t^2 + 0,5 \sin(22,92t^2 + 38,43^\circ).\end{aligned}$$

Ezekkel számítva a feladat másik értelmezése esetében keletkező pályát a 4. ábra mutatja.



A görbe mindig ugyanannak a cikloisznak más és más része. Most is ugyanakkorák az a_1 , a_2 , a_3 gyorsulásösszetevők, de irányuk függőleges, illetve vízszintes. Az eredő most is ugyanakkora, csak más irányba mutat.

Vermes Miklós