

A feladat szövege félreértésre adott lehetőséget, továbbá a megoldáshoz szükséges összefüggés sem állt mindenkinek rendelkezésre. A beérkezett 31 dolgozat egyike sem tartalmazott helyes megoldást. Ezért a feladatot nem pontozzuk. Itt közöljük a pontos szöveget és a megoldást. A felhasznált összefüggéssel foglalkozik még a lapunk 178. oldalán közölt cikk.

Egy R sugarú fagömböt vékony dróttal tekercseljünk körül úgy, hogy az összes tekercsmenetek egymással párhuzamosak legyenek. A tekercsmenetek szorosan egymás mellett fekszenek, s egy rétegben fedik be az ábrán látható módon a gömbfelület felét. A drótban I erősségű áram folyik, a menetek száma N . Határozzuk meg a gömb középpontjában a mágneses térerősséget, tudva azt, hogy egy r sugarú, I erősségű köráram a síkjára a kör középpontjában emelt merőlegesen x távolságra

$$\frac{1}{2} \frac{Ir^2}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

nagyságú, a síkra merőleges irányú mágneses teret hoz létre. (Ez az összefüggés akkor érvényes, ha az áramerősséget A-ban, a távolságot m-ben, a mágneses térerősséget pedig A/m-ben mérjük.)

Avégett, hogy az összes menektől származó térerősséget kiszámítsuk, osszuk fel az első negyedlet n egyenlő, $\Delta\varphi$ nagyságú szögre. Az osztópontok tehát

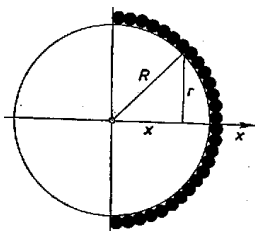
$$(1) \quad 0, \quad \Delta\varphi, \quad 2\Delta\varphi, \quad \dots, \quad k\Delta\varphi, \quad \dots, \quad n\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

(Megjegyezzük, hogy a szöget mindig radiánban adjuk meg.) A k -adik szögtartomány határpontjai eszerint:

$$(k-1)\Delta\varphi \quad \text{és} \quad k\Delta\varphi.$$

Mivel a menetek szorosan illeszkednek egymáshoz, azért bármelyik szögtartományban a menetek száma

$$(2) \quad \Delta N = \frac{2N}{\pi} \Delta\varphi.$$



1. ábra

Az egy menet által a középpontban létesített térerősség – az 1. ábra jelöléseit használva

$$(3) \quad \frac{1}{2} \frac{Ir^2}{(x^2 + r^2)^{3/2}}.$$

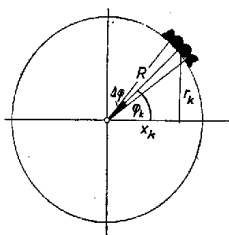
Relative is kis hibát követünk el akkor, ha a menetet az x -tengelyhez viszonyítva jellemző szöget egy szögtartományon belül állandónak tekintjük, amennyiben $\Delta\varphi$ elég kicsi (vagyis n elég nagy).

Választhatjuk pl. a szögtartományt felező szöget, tehát a k -adik tartomány esetében ez az állandó szög:

$$\varphi_k = \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta\varphi.$$

Ezek alapján a k -adik tartomány meneteitől származó térerősséget úgy állítjuk elő mint ΔN db olyan menettől származó teret, amelyet a φ_k szög jellemez. Ez a térerősség:

$$(5) \quad \Delta H_k = \frac{1}{2} \frac{Ir^2}{(x_k^2 + r_k^2)^{3/2}} \Delta N.$$



2. ábra

Felhasználva egyrészt ΔN kifejezést (2), másrészt a 2. ábráról leolvasható $x_k^2 + r_k^3 = R^2$ egyenlőséget, kapjuk:

$$(6) \quad \Delta H_k = \frac{INr_k^2}{R^3\pi} \Delta\varphi.$$

Mivel azonban a 2. ábra szerint $r_k = R \sin \varphi_k$, ezért

$$(7) \quad \Delta H_k = \frac{IN}{R\pi} \Delta\varphi \sin^2 \varphi_k.$$

A teljes térerősséget úgy kapjuk, hogy ΔH_k -t valamennyi tartományra összegezzük:

$$(8) \quad H = \sum_{k=1}^n \Delta H_k = \frac{IN}{R\pi} \Delta\varphi \sum_{k=1}^n \sin^2 \varphi_k.$$

Mivel $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, azért

$$(9) \quad \sum_{k=1}^n \sin^2 \varphi_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \cos 2\varphi_k = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos 2\varphi_k.$$

A továbbiakban csak a $\sum_{k=1}^k \cos 2\varphi_k$ meghatározásával foglalkozunk. Ez – beírva φ_k (4) alatti kifejezését – így alakul:

$$(10) \quad \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)\Delta\varphi.$$

Legyen először n páros. Ekkor $n/2$ egész, tehát ez a szumma így írható:

$$(11) \quad \sum_{k=1}^{n/2} \cos(2k-1)\Delta\varphi + \sum_{k=n/2+1}^n \cos(2k-1)\Delta\varphi.$$

A második tagban felhasználjuk, hogy $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$, ezért $\cos(2k-1)\Delta\varphi = -\cos[\pi - (2k-1)\Delta\varphi]$. De (1) szerint $\pi = 2n\Delta\varphi$, tehát ez így írható tovább: $-\cos[2(n-k)+1]\Delta\varphi = -\cos(2k'-1)\Delta\varphi$, ahol k' -vel az $n-k+1$ egész számot jelöltük.

Milyen értékeket vesz fel k' , miközben k végigfut $(n/2+1)$ -től n -ig? Világos, hogy ezalatt k' $n/2$ -től 1-ig fut, tehát a második tag így alakul:

$$(12) \quad \sum_{k=n/2+1}^n \cos(2k-1)\Delta\varphi = -\sum_{k'=1}^{n/2} \cos(2k'-1)\Delta\varphi.$$

Látható, hogy – mivel az összegező index jelölésének nincs jelentősége (11)-ben az első és a második tag kiesik. Ezért n páros értékeire

$$(13) \quad \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)\Delta\varphi = 0.$$

Ha n páratlan, akkor $\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)$ és $\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right)$ egymást követő egész számok. Ezért ekkor a szumma így írható:

$$(14) \quad \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \cos(2k-1)\Delta\varphi + \cos\left[2\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) - 1\right] \Delta\varphi + \sum_{k=\frac{n}{2}+\frac{3}{2}}^n \cos(2k-1)\Delta\varphi.$$

A középső tagról azonnal látjuk, hogy eltűnik, mert a szögletes zárójelben n áll, $n\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, és $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. A második szummát most is könnyen átalakíthatjuk, és $k' = n + k - 1$ jelöléssel az előző esethez hasonlóan, az első szummától csak előjelben és az összegező index jelölésében fog eltérni. Ezért páratlan n -re is:

$$(15) \quad \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)\Delta\varphi = 0.$$

Most már a célnál vagyunk: eredményünk szerint

$$(16) \quad \sum_{n=1}^n \sin^2 \varphi_k = \frac{n}{2}.$$

Ezt a teljes térerősség (8) kifejezésébe helyettesítve:

$$(17) \quad H = \frac{INn\Delta\varphi}{2R\pi}.$$

Felhasználva, hogy $n\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, kapjuk, hogy közelítőleg

$$(18) \quad H = \frac{IN}{4R}.$$

Nagy Dénes Lajos