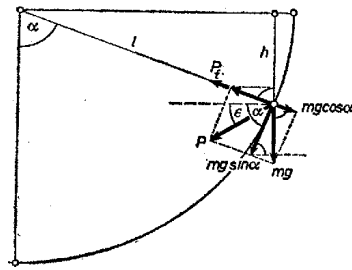


Az inga tömegének helyzetét az α szög határozza meg. Az m tömegre hat mg súlyerő, amelyet helyettesíthetünk $mg \sin \alpha$ és $mg \cos \alpha$ összetevőivel. Azonkívül az m tömeget a középpont felé húzza a fonál P_l erővel. A fonál ereje egyenlő az mv^2/l nagyságú centripetális erő és $mg \cos \alpha$ nagyságának összegével. l a fonál hosszát, v pedig a sebességet jelenti, amely így számítható: $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl \cos \alpha}$ (1. ábra). A súly kifelé ható $mg \cos \alpha$ összetevője és a P_l fonálerő ellentétesen ható $mg \cos \alpha$ része kiegyenlíti egymást; marad az m tömegre ható érintőleges $mg \sin \alpha$ erő és a középpont felé húzó $mv^2/l = 2gm \cos \alpha$. Ezek eredője a teljes P erő. Az erőket osztva a tömeggel kapjuk a gyorsulást. Az eredő gyorsulás függőlegesen lefelé mutató összetevője:

$$(1) \quad \begin{aligned} a_f &= g \sin \alpha \sin \alpha - 2g \cos \alpha \cos \alpha = \\ &= g(\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha) = g(1 - 3 \cos^2 \alpha), \end{aligned}$$

az eredő gyorsulás vízszintesen balra mutató összetevője:

$$(2) \quad a_v = g \sin \alpha \cos \alpha + 2g \cos \alpha \sin \alpha = 3g \sin \alpha \cos \alpha.$$



1. ábra

Az általunk keresett fonálhelyzetet úgy találjuk meg, hogy az (1) szerinti függőleges összetevőt 0-val tesszük egyenlővé:

$$g(1 - 3 \cos^2 \alpha) = 0.$$

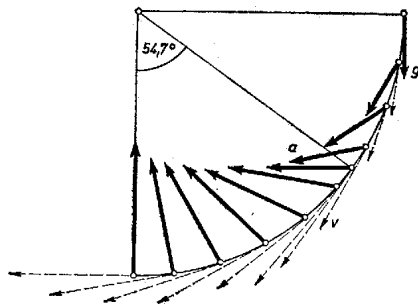
Innen

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = 54,7^\circ.$$

E gyorsulás nagysága (2)-ből $g\sqrt{2}$.

Tóth-Pál Sándor (Bp., Hámán K. g. III. o. t.)

Megjegyzések. A feladatra beküldött sok hibás megoldás azt mutatja, hogy sokan nincsenek tisztában a gyorsulás szerepével görbevonalú mozgás esetében. Az eredeti meghatározás szerint a gyorsulást úgy kapjuk meg, hogy a sebességnek mint vektornak az „1 másodpercre jutó megváltozását” keressük. Az inga pályája mentén a sebesség mindig az érintő mentén mutat és mindig növekszik, változásából megkaphatnánk a gyorsulást. Könnyebb úgy eljárni, hogy a ható erőket osztjuk a tömeggel. De a ható erő a tömegre kívülről ható erők eredőjét jelenti. Itt sokan abban hibáztak, hogy a fonálban csak a centripetális erőt tételezték fel, mint ható erőt. Ha körpályán állandó nagyságú sebességgel mozog egy tömeg, akkor a gyorsulás merőleges az érintőre, a középpont felé mutat. Ha a sebesség nagysága is változik, akkor a gyorsulásnak érintőmenti összetevője is van és az egész gyorsulás az érintőmenti és merőlegesen befelé mutató gyorsulásösszetevő eredője. Tehát görbevonalú mozgás esetében a gyorsulás mindig a pálya homorú oldala felé irányul. Így van ez most is. Amikor az inga tömegét elengedjük a vízszintes helyzetből, egy pillanatig szabadesést végez és gyorsulása g , függőlegesen lefelé irányítva. A pálya legalsó részén a sebesség egy pillanatig állandó, a gyorsulás ekkor merőleges a pályára, függőlegesen felfelé mutat. Belátható, hogy e két helyzet között kell egy olyanak lennie, amikor a gyorsulás vízszintes.



2. ábra

Tanulságos, ha tanulmányozzuk a gyorsulás alakulását végig az inga pályája mentén (2. ábra). A gyorsulás teljes nagyságát (1)-ből és (2)-ből kapjuk meg:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_f^2 + a_v^2} = g\sqrt{(1 - 3\cos^2 \alpha)^2 + 9\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \\ &= g\sqrt{4 - 3\sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Az eredő gyorsulás vízszintessel alkotott, lefelé mutató ε szögét (1) és (2) osztásával kapjuk:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{a_f}{a_v} = \frac{1 - 3\cos^2 \alpha}{2\sin \alpha \cos \alpha}.$$

A 2. ábra nyilai az eszerint számított gyorsulásokat tüntetik fel. A szaggatott nyilak a sebességeket mutatják.

Ha az ingát nem 90° -os, hanem valamilyen α_0 helyzetből indítjuk el, akkor így módosul a sebesség kifejezése:

$$v = \sqrt{2gl(\cos \alpha - \cos \alpha_0)},$$

ennek felhasználásával a vízszintes gyorsulás helyzetét megadó szögre:

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha_0 + \sqrt{3 + \cos^2 \alpha_0}}{3}.$$