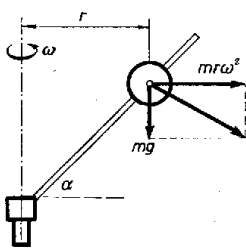


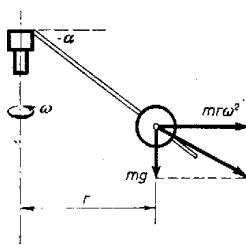
I. megoldás. Vizsgálatunkhoz a rendszerrel együtt forgó koordinátarendszert választjuk. Súrlódásmentes esetben a kényszererőn kívül a tolósúlyra két erő hat: súly és a centrifugális erő. Egyensúly akkor van, ha ezen erők rúdírányú vetületeinek összege 0, hiszen a kényszererő a rúdra mindig merőleges. Pozitívnak választva a kifelé mutató irányt:

$$(1) \quad mr\omega^2 \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0, \quad \text{és innen} \quad r = \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Világos, hogy nagyobb r -nél csak a centrifugális erő nő meg, és ez r -et tovább igyekszik növelni. Ezért az egyensúly labilis. Mivel $r > 0$, ezért egyensúly csak akkor lehet, ha $\alpha > 0$, tehát a rúd nem lehet vízszintes, és nem is mutathat lefelé. (Az $r \leq 0$ eset fizikailag értelmetlen, az $\omega = 0$ pedig a közönséges lejtőt jelenti, így ezekkel nem foglalkozunk.)



1. ábra



2. ábra

A súrlódásos esetben az egyensúly feltétele az, hogy a centrifugális és a súlyerő rúdírányú komponenseinek összege abszolút értékben ne legyen nagyobb a maximális súrlódási erőnél. A maximális súrlódási erőt úgy kapjuk meg, hogy a centrifugális és a súlyerő rúdra merőleges komponensei összegének abszolút értékét szorozzuk a μ súrlódási együtthatóval. (Azért az abszolút értékét, mert a rúd egyik oldalát pozitívnak választva, a nyomóerők összege negatív is lehet. Pl. az 1. ábrán látható esetben pozitív α -nál ugyan mindig pozitív a nyomóerő, de negatív α -nál – ha a centrifugális erő elég nagy – már negatívvá válhat (l. a 2. ábrát!). Márpedig a negatív nyomóerő által előidézett súrlódási erő is ugyanolyan, mint a pozitív által előidézett, hiszen az irányát nem a kiváltó nyomóerő iránya, hanem a megakadályozandó mozgás iránya szabja meg.) Ezek figyelembe vételével az egyensúly szükséges és elegendő feltétele:

$$|r\omega^2 \cos \alpha - g \sin \alpha| \leq \mu |g \cos \alpha + r\omega^2 \sin \alpha|.$$

Mivel $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ és $\omega \neq 0$, azért oszthatunk a határozottan pozitív $\omega^2 \cos \alpha$ -val:

$$\left| r - \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tg} \alpha \right| \leq \mu \left| \frac{g}{\omega^2} + r \operatorname{tg} \alpha \right|.$$

Két esetet kell megkülönböztetnünk:

A) $\alpha \geq 0$. Ekkor a jobboldali abszolút érték jelben álló kifejezése pozitív, ezért az abszolút érték jele elhagyható. A bal oldali abszolút értéket kettős egyenlőtlenséggel helyettesítjük:

$$-\mu \frac{g}{\omega^2} - \mu r \operatorname{tg} \alpha \leq r - \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tg} \alpha \leq \mu \frac{g}{\omega^2} + \mu r \operatorname{tg} \alpha.$$

Az első egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk:

$$r(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) \geq (\operatorname{tg} \alpha - \mu)g/\omega^2.$$

Mivel μ is, $\operatorname{tg} \alpha$ is pozitív, azért $1 + \mu \operatorname{tg} \alpha$ annál inkább, és így az egyenlőtlenséget oszthatjuk vele:

$$r \geq \frac{g}{\omega^2} \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}.$$

A másik egyenlőtlenséggel nem járhatunk el úgy, csak akkor, ha $\mu < \operatorname{ctg} \alpha$, mert itt $(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)$ -val kell osztani. Ebben az esetben tehát az egyensúly feltétele:

$$(2 \text{ a-b}) \quad \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} \leq r \leq \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}.$$

Ha $\mu > \operatorname{ctg} \alpha$, akkor a második egyenlőtlenség semmitmondóvá válik. Ekkor ugyanis a negatív $(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)$ -val osztva megfordul az egyenlőtlenség:

$$r \geq \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha},$$

ami nyilván mindig teljesül, lévén a bal oldal pozitív, a jobb oldal pedig negatív. A $\mu > \operatorname{tg} \alpha$ esetben tehát nincs felső korlát r -re.

B) $\alpha > 0$. Most a bal oldali abszolút érték hagyható el, az így kapott egyenlőtlenséget most is szétbonthatjuk két egyenlőtlenségre, most azonban nem kell mindkettőnek teljesülnie, az egyensúlyhoz elég, ha az egyik teljesül.

Az első:

$$r(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) \leq (\operatorname{tg} \alpha + \mu)g/\omega^2.$$

Mivel most $\operatorname{tg} \alpha < 0$, azért $1 - \mu \operatorname{tg} \alpha$ pozitív, és így oszthatunk vele. Az egyensúlynak tehát elégséges feltétele:

$$(3 \text{ a}) \quad r \leq \frac{g}{\omega^2} \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}.$$

A második:

$$r(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) \leq (\operatorname{tg} \alpha - \mu)g/\omega^2.$$

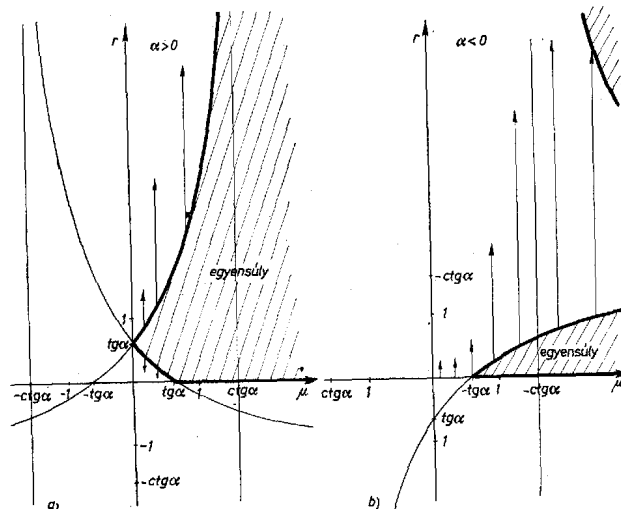
Itt további két eset lehetséges. Ha $\mu < -\operatorname{ctg} \alpha$, akkor kielégíthetetlen egyenlőtlenséget kapunk, lévén bal oldala pozitív, jobb oldalának számlálója negatív, nevezője pozitív:

$$r \leq \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}.$$

Amennyiben azonban $\mu > -\operatorname{ctg} \alpha$, az egyenlőtlenség megfordul, és az egyensúly egy további elégséges feltételét szolgáltatja:

$$(3 \text{ b}) \quad r \geq \frac{g}{\omega^2} \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}.$$

Az egyensúlyi viszonyok igen szemléletesen ábrázolhatók (3. ábra). Az ábrán a nyilak azt jelölik, hogy a súly a nem-egyensúlyi helyzetéből merre mozdul el. A diagramon r -et g/ω^2 egységekben ábrázoltuk!



3. ábra

II. megoldás. A fenti eredményeknek igen szemléletes jelentés adható. Jelöljük ui. μ -t $\text{tg } \varphi$ -vel. (Ismeretes, hogy φ a súrlódási határszög.) Ekkor az egyenlőtlenségekben mindenütt $\text{tg}(\alpha + \varphi)$, ill. $\text{tg}(\alpha - \varphi)$ lép fel. Ennek fizikai oka a következő. A forgó rendszerből nem tudjuk megkülönböztetni a gravitációs és a centrifugális erőt. Ezért függőleges iránynak a két erő eredőjének irányát érezzük. Az így meghatározott vízszintes iránnyal maximálisan φ szöget zárhat be a rúd – a súrlódási határszög definíciója szerint – anélkül, hogy a súly elmozdulna. Ha azonban nem α -t, hanem r -et változtatjuk, akkor ezzel együtt változik a helyi vízszintes is. Ezt nyilván (1) írja le, r -et tehát addig változtathatjuk, amíg ezáltal a helyi vízszintes nem tér el φ -nél nagyobb szöggel a rúdtól. Ezek után a diszkusszió már könnyen elvégezhető, és megkapjuk a (2) és (3) feltételi egyenlőtlenségeket.

Mészáros Ildikó (Veszprém, Lovassy L. g. IV. o. t.)