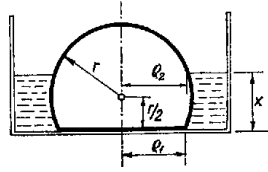


Ha a folyadék be tudna hatolni a test alá, akkor a feladatot Archimedesz törvényével oldanánk meg. A testre a súlya és a kiszorított folyadék súlyával egyenlő nagyságú erő hatna. A feladatban nem jut folyadék a test és a tál közé, tehát a felhajtóerő kevesebb azzal az erővel, amelyet a körmetszetre ható hidrosztatikai nyomás fejt ki. Ezeknek ismeretében kiszámítjuk a testre ható erőket.



Legyen az edényben a folyadék magassága x , a folyadék fajsúlya γ_f , a test fajsúlya γ , és a gömb sugara r . Pythagoras tétele alapján a két körmetszet sugarának négyzete:

$$\varrho_1^2 = \frac{3}{4} r^2 \quad \varrho_2^2 = \frac{3}{4} r^2 + rx - x^2.$$

A test (gömbszelet) térfogata:

$$V = \frac{\pi \left(\frac{3}{2} r \right)^2}{3} \left(3r - \frac{3}{2} r \right) = \frac{9}{8} r^3 \pi,$$

a test súlya $\frac{9}{8} r^3 \pi \gamma$.

A kiszorított víz térfogata (gömbbréteg):

$$\frac{1}{6} \pi x \left(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + x^2 \right) = \pi x \left(\frac{3}{4} r^2 + \frac{1}{2} rx - \frac{1}{3} x^2 \right).$$

Az a felhajtóerő, mely akkor hatna a testre, ha víz lenne alatta:

$$\pi x \left(\frac{3}{4} r^2 + \frac{1}{2} rx - \frac{1}{3} x^2 \right) \gamma_f.$$

Az az erő, melyet a felhajtóerőből le kell vonni, mivel nincs víz a test és az edény feneké között (hidrosztatikai nyomás szorozva a felülettel):

$$\varrho_1^2 \pi x \gamma_f = \frac{3}{4} r^2 x \pi \gamma_f.$$

A testre ható erők eredője a feladat szerint 0, tehát:

$$\frac{9}{8} r^2 \pi \gamma - \left[\pi x \left(\frac{3}{4} r^2 + \frac{1}{2} rx - \frac{1}{3} x^2 \right) \gamma_f - \frac{3}{4} r^2 x \pi \gamma_f \right] = 0,$$

rendezve

$$8\gamma_f x^3 - 12\gamma_f r x^2 + 27\gamma r^3 = 0,$$

$$8 \left(\frac{x}{r} \right)^3 - 12 \left(\frac{x}{r} \right)^2 + 27 \frac{\gamma}{\gamma_f} = 0.$$

Ez a harmadfokú egyenlet határozza meg az x folyadékmagasságot akkor, amikor a testre ható erők eredője 0. Ha ismerjük a γ/γ_f számértékét, akkor grafikus módszerrel meghatározhatjuk az $\left(\frac{x}{r} \right)$ -et, és ebből r ismeretében x -et.

Lábadai Albert (Bp., Vörösmarty M. gimn. III. o. t.)

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy a testre ható erők eredője csak akkor lehet 0, ha $\gamma < \frac{4}{27} \gamma_f$.