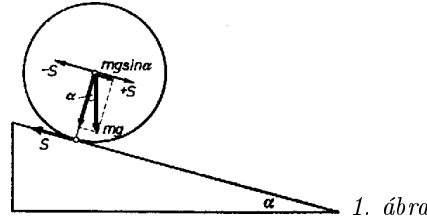


A golyóra az $mg \sin \alpha$ mozgató erő és az ismeretlen nagyságú S súrlódási erő hat. A golyó súlyának $mg \cos \alpha$ összetevőjét a lejtő kényszerereje kiegyenlíti és ezért nem vesszük számításba (1. ábra). A golyó középpontjában hozzáveszünk $+S$ és $-S$ erőket. A golyó középpontjában $mg \sin \alpha - S$ gyorsít, és létrehoz a gyorsulási mozgást, ezért a mozgástörvény alapján:

$$(1) \quad ma = mg \sin \alpha - S.$$



1. ábra

S súrlódási erő és a golyó középpontjában ható $-S$ forgatónyomatékok jelentenek, amely az I tehetetlenségi nyomatékú golyót β szöggyorsulással forgatja (az erőkar r , a golyó rádiusza). A forgómozgás alaptörvénye szerint:

$$(2) \quad \frac{Sr}{I} = \beta.$$

Végül a golyó sima legördüléséből következik, hogy

$$(3) \quad a = \beta r.$$

(Lásd A dinamikai példák megoldásáról című cikket a lap 1965. évi 2. számában.) Az (1), (2) és (3) egyenletrendszer megoldjuk a -ra, S -re és β -ra.

Az eredmény:

$$(4) \quad a = g \cdot \frac{m \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}},$$

$$(5) \quad S = mg \cdot \frac{\frac{I}{r^2} \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}},$$

$$(6) \quad \beta = \frac{g}{r} \cdot \frac{m \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}}.$$

Mindez azonban csak addig igaz, amíg a súrlódási együttható elég nagy ahhoz, hogy az (5) által kívánt súrlódási erőt létre tudja hozni. A legnagyobb súrlódási erő, amely keletkezhet: $\mu mg \cos \alpha$. A súrlódási együttható kritikus értékét megkapjuk, ha ezt az (5) által megkívánt súrlódási erővel tesszük egyenlővé:

$$\mu_k mg \cos \alpha = mg \cdot \frac{\frac{I}{r^2} \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}}.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása adja a súrlódási együttható kritikus értékét:

$$(7) \quad \mu_k = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\frac{I}{r^2}}{m + \frac{I}{r^2}}.$$

Ha a súrlódási együttható ennél kisebb, akkor a golyó megcsúszik, nem gördül le simán. Ekkor az (1) és (2) alatti mozgásegyenletekbe beírjuk a súrlódási erő igénybe vett $\mu mg \cos \alpha$ legnagyobb értékét:

$$(6') \quad \begin{aligned} ma &= mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \\ \frac{\mu mgr \cos \alpha}{I} &= \beta. \end{aligned}$$

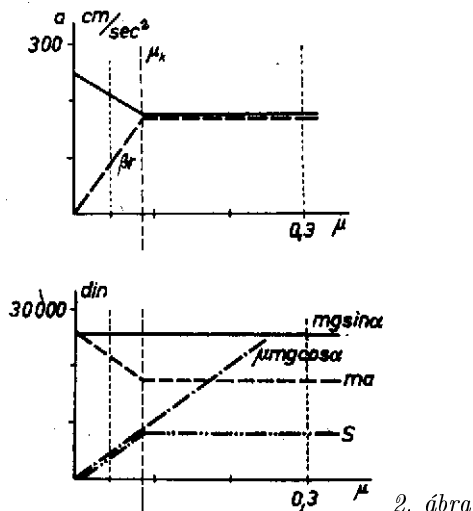
Ennek az egyenletrendszernek a megoldása β -ra maga (6'), a -ra pedig:

$$(4') \quad a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

a súrlódási erő pedig $\mu mg \cos \alpha$.

Feladatunk számadatai mellett $\alpha = 15^\circ$, $r = 2$ cm, $m = 100$ gramm, $I = 2mr^2/5 = 160$ gcm². Így a kritikus súrlódási együttható $\mu_k = 0,076$. Az első esetben, $\mu = 0,3$ mellett a súrlódás elég nagy ahhoz, hogy a golyó simán gördüljön le; középpontjának gyorsulása $a = 5g \sin \alpha / 7 = 174$ cm/sec², a súrlódási erő $S = 2mg \sin \alpha / 7 = 7982$ din, a szöggyorsulás $\beta = 5g \sin \alpha / 7r = 87,1$ sec⁻², mindez (4), (5) és (6) alapján. A második esetben, $\mu = 0,05$ mellett a golyó megcsúszik; ekkor (4') és (6') alapján $a = 206$ cm/sec² és $\beta = 59,2$ sec⁻², a súrlódási erő pedig 4735 din. A gyorsulásra kapott eredmények minden esetben függetlenek a tömegtől és a rádiustól.

Jakab Mihály (Bp., Móricz Zs. g. III. o. t.)



2. ábra

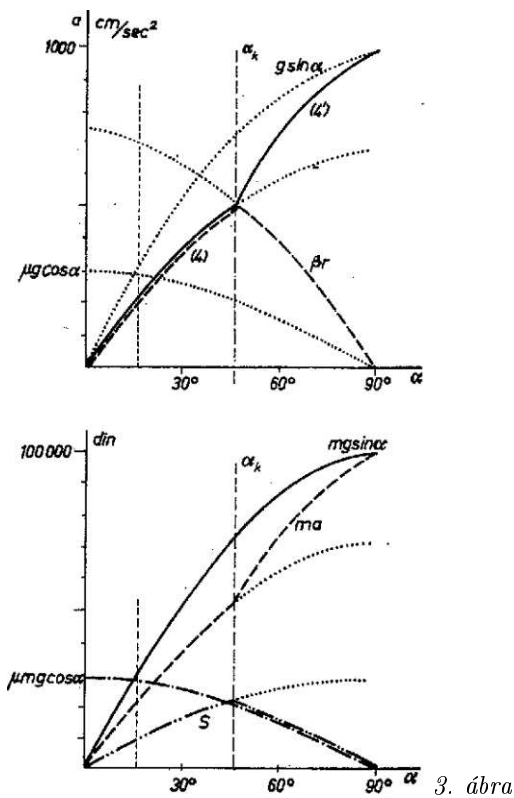
1. megjegyzés. Vizsgáljuk meg a jelenséget állandó $\alpha = 15^\circ$ -os szög mellett, de a μ súrlódási együttható értékétől függően (2. ábra). Az ábra felső részén a golyó középpontjának gyorsulását látjuk μ függvényében. Súrlódás nélkül $g \sin \alpha = 244$ cm/sec² a gyorsulás, majd μ növekedtével (4') szerint csökken. A kritikus súrlódási együttható elérésétől fogva a mindvégig μ -tól függetlenül a (4)-ből következő 174 cm/sec² marad. A rajz alsó részén az erők függését tanulmányozhatjuk. A folytonos vonal a végeredményben rendelkezésünkre álló $mgsin\alpha$ erőt mutatja. Amíg a súrlódási együttható 0 és μ_k között van, az ma mozgató erő a -val arányosan csökken, az S súrlódási erő μ -vel arányosan növekszik, miközben összegük állandóan $mgsin\alpha$ marad. μ_k feletti súrlódásnál ma és S a (4)-ből és (5)-ből következő állandó értékeket veszik fel. Látható, hogy ilyenkor nem vesszük igénybe a teljes, $\mu mg \cos \alpha$ által megadott lehetséges súrlódási erőt. A 2. ábra felső részén a szaggatott vonal βr forgásból származó kerületi gyorsulást tünteti fel; látható, hogy μ_k -ig egyre csökkenő megcsúszás történik, ezután sima legördülés.

Takács Gábor (Bp., Piarista g. IV. o. t.)

2. megjegyzés. Vizsgáljuk meg a jelenséget állandó $\mu = 0,3$ súrlódási együttható, de 0-tól 90°-ig növekvő α szög mellett (3. ábra). A megcsúszás határát jelentő kritikus hajlásszöget (7)-ből számítjuk:

$$\operatorname{tg} \alpha_k = 3,5\mu = 1,05, \quad \alpha_k = 46^\circ 24'.$$

Ennél laposabb lejtőkön sima legördülés, meredekebb lejtőkön megcsúszás következik be. A 3. ábra felső rajzán a folytonos vonal a gyorsulás értékét α_k -ig (4) szerint, α_k -nál meredekebb lejtőknél (4') szerint számítva tünteti fel. A 3. ábra alsó rajzán a folytonos vonal a teljes rendelkezésünkre álló $mgsin\alpha$ erőt tünteti fel. A szaggatott vonal az a -val arányban levő ma gyorsító erőt ábrázolja. $\mu mg \cos \alpha$ a lehetséges maximális, S pedig az igénybe vett súrlódási erő mutatja. A 3. ábra felső részén a szaggatott vonal a βr forgásból származó kerületi gyorsulást tünteti fel; látható, hogy 0-tól α_k -ig sima legördülés, meredekebb lejtőknél egyre növekvő megcsúszás lép fel.



3. ábra

3. megjegyzés. Megoldható a feladat a mechanikai energiamegmaradás törvényével is. A golyó helyzeti energiájának csökkenése egyenlő a végzett munkával. Abban az esetben, ha sima legördülésről van szó, a helyzeti energia csökkenése egyenlő a golyó haladó és forgó mozgásából származó energiák összegével; ekkor nem végzünk munkát a csúszó súrlódás ellen. Ha nincs sima legördülés, akkor az előbbi mozgási energia mellett a súrlódási erő ellen is végzünk munkát, amelynél az erő $\mu mg \cos \alpha$, az út a csúszva és gördülve megtett utak különbsége. Ugyanazokat az eredményeket kapjuk, mint az előbbi számítással. A sima gördülés határesetében a kétféle módon számított gyorsulás egyenlő.

Bodonhelyi Márta (Bp., Móra Ferenc g. IV. o. t.)