

A zsák esési ideje a $h/2$ úton

$$t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}, \quad h \text{ úton } t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Az x magasságból eső kő esési ideje

$$t_3 = \sqrt{\frac{2x}{g}}, \quad \text{a kő indítása után } t_4 = \sqrt{\frac{2x-h}{g}}$$

idő után éri el a zsákot.

A zsák az utolsó $h/2$ utat $t_2 - t_1$ idő alatt teszi meg, a kő ugyanezt az utat $t_3 - t_4$ idő alatt. Ennek alapján $t = (t_2 - t_1) - (t_3 - t_4) = t_2 - t_1 - t_3 + t_4$, az előbbieket felhasználásával

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}} - \sqrt{\frac{2x}{g}} + \sqrt{\frac{2x-h}{g}}.$$

Algebrai átalakításokkal

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-h} - \sqrt{2x} &= \sqrt{g} \cdot t + \sqrt{h} - \sqrt{2h}, \quad \text{ebből} \\ \sqrt{2x-h} &= [\sqrt{g} \cdot t + \sqrt{h}(1 - \sqrt{2})] + \sqrt{2x}, \end{aligned}$$

négyzetre emelve, rendezve, a szögletes zárójelben levő kifejezést a -val jelölve,

$$\begin{aligned} 2x - h &= a^2 + 2x + 2a\sqrt{2x}, \quad \text{amiből} \\ -2a\sqrt{2x} &= a^2 + h, \quad \text{újabb négyzetre emeléssel} \\ 4a^2 \cdot 2x &= (a^2 + h)^2, \\ x &= \frac{(a^2 + h)^2}{8a^2} = \frac{\{[\sqrt{g}t + \sqrt{h}(1 - \sqrt{2})]^2 + h\}^2}{8[\sqrt{g}t + \sqrt{h}(1 - \sqrt{2})]^2}. \end{aligned}$$

A kő $t' = t_4 - t_1$ idővel a zsák indítása előtt indult:

$$t' = \sqrt{\frac{2x-h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Számszerűen $x = 22$ m, $t' = 0,413$ sec.

A t megadásánál figyelembe kell vennünk, hogy t feltétlenül kisebb $t_2 - t_1$ -nél. hiszen a kő nem lehet előbb lent, mint $h/2$ magasan, még kevésbé lehet egyszerre a két helyen ($h \neq 0$).

Ezt felírva

$$t < \sqrt{\frac{h}{g}}(\sqrt{2} - 1).$$

Ez a feltétel egyben azt is kiköti, hogy az x -re kapott kifejezés nevezője nem lehet 0.

Nem pozitív t -nek is adhatunk értelmet. Pl. $t = 0$ esetben képletünk megadja a nyilvánvaló $x = 4$ megoldást.

Negatív t esetén azonban ki kell kötnünk, hogy az eredményül kapott x nem kisebb $h/2$ -nél, így t_3 minimuma $\sqrt{\frac{h}{g}}$. t alsó korlátját ennek alapján kiszámíthatjuk

$$t \geq t_3 - (t_2 - t_1) \geq \sqrt{\frac{h}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{\frac{h}{g}}(2 - \sqrt{2}).$$

Ebből

$$t \geq (-2 - \sqrt{2})\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Egyesítve a 2 feltételt

$$(\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{h}{g}} > t \geq (-2 - \sqrt{2})\sqrt{\frac{h}{g}}.$$