

**I. megoldás.**  $t$  idő elteltével a két autó  $r_1 - v_1 t$ , illetve  $r_2 - v_2 t$  távolságra van a kereszteződési ponttól. Az  $ABO$  háromszögre felírjuk a koszinusz tételt:

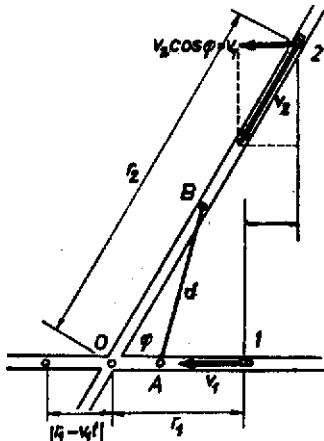
$$d^2 = (r_1 - v_1 t)^2 + (r_2 - v_2 t)^2 - 2(r_1 - v_1 t)(r_2 - v_2 t) \cos \varphi.$$

Rendezve

$$d^2 = (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \varphi) t^2 - 2[v_1 r_1 + v_2 r_2 - (v_1 r_2 + v_2 r_1) \cos \varphi] t + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi,$$

majd teljes négyzetté alakítva

$$d^2 = (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \varphi) \left( t - \frac{v_1 r_1 + v_2 r_2 - (v_1 r_2 + v_2 r_1) \cos \varphi}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \varphi} \right)^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi - \frac{[v_1 r_1 + v_2 r_2 - (v_1 r_2 + v_2 r_1) \cos \varphi]^2}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \varphi}.$$



A távolság akkor a legkisebb, ha a távolság négyzete minimális. A jobboldalnak akkor van minimuma, ha

$$t - \frac{v_1 r_1 + v_2 r_2 - (v_1 r_2 + v_2 r_1) \cos \varphi}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \varphi} = 0, \quad \text{vagyis}$$

$$t = \frac{v_1 r_1 + v_2 r_2 - (v_1 r_2 + v_2 r_1) \cos \varphi}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \varphi}.$$

Ekkor a távolság négyzete

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi - \frac{[v_1 r_1 + v_2 r_2 - (v_1 r_2 + v_2 r_1) \cos \varphi]^2}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \varphi}.$$

Ha  $v_2 = 2v_1$  és  $r_2 = 3r_1$ :

$$t = \frac{7 - 5 \cos \varphi}{5 - 4 \cos \varphi} \cdot \frac{r_1}{v_1}, \quad d^2 = \left[ 10 - 6 \cos \varphi - \frac{(7 - 5 \cos \varphi)^2}{5 - 4 \cos \varphi} \right] r_1^2.$$

Numerikus adatokat behelyettesítve:  $t = 3$  óra,  $d = 50$  km.

*Dékány István (Bp., Fazekas M. Gyak. gimn. II. o. t.)*

**II. megoldás.** A numerikus adatokból látszik, hogy a második autó sebességének az első autó útjára eső vetülete megegyezik az első autó sebességével, mivel

$$2v_1 \cos 60^\circ = v_1.$$

Így, ha a második autó a kereszteződési pontban van, akkor a távolságnak biztosan minimuma van, mert az első autó sebességének irányába eső távolság marad meg. Ebben az esetben:

$$r_2 = v_2 t, \quad t = \frac{r_2}{v_2}, \quad \text{amiből} \quad t = \frac{3r_1}{2v_2}.$$

Numerikus adatokkal

$$t = \frac{300 \text{ km}}{100 \text{ km/ó}} = 3 \text{ óra},$$

ekkor a távolság, mivel a második autó a találkozási pontban van:

$$|r_1 - v_1 t| = 50 \text{ km}.$$

*Bor Zsolt (Szeged, Ságvári E. gimn. II. o. t.)*