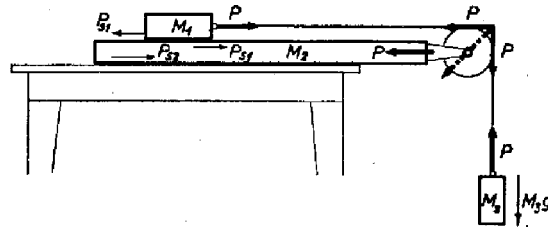


Legyen először minden súrlódási együttható nulla. A gyorsulások és a kötelerő ekkor csak a testek tömegétől és a gravitációs gyorsulástól függenek. A négy ismeretlen meghatározásra írjuk fel a mozgásegyenleteket. Ez három egyenletet szolgáltat (három testből áll a rendszer). A negyedik egyenletet a köztük fellépő geometriai kényszer fogja megadni: a súlytalan, abszolút hajlékony, de nyújthatatlan fonál a testek által megtett utak, illetőleg a gyorsulások között szab meg egy kapcsolatot.



A három mozgásegyenlet (l. az ábrát)

$$\begin{aligned} (1) \quad & M_1 a_1 = P, \\ (2) \quad & M_2 a_2 = P, \\ (3) \quad & M_3 a_3 = M_3 g - P. \end{aligned}$$

A megtett utak:

$$s_1 = \frac{a_1}{2} t^2, \quad s_2 = \frac{a_2}{2} t^2, \quad s_3 = \frac{a_3}{2} t^2.$$

s_1 és s_2 megadják a vízszintes kötélrész rövidülését, s_3 pedig a függőleges szakasz növekedését. Mivel a kötel hossza mozgás közben nem változik,

$$\begin{aligned} (4) \quad & s_1 + s_2 = s_3, \quad \text{ahonnan} \\ & a_1 + a_2 = a_3. \end{aligned}$$

(4)-et (1), (2) és (3) alapján

$$\frac{P}{M_1} + \frac{P}{M_2} = \frac{M_3 g - P}{M_3}$$

alakba írva adódik P értéke:

$$P = \frac{M_1 M_2 M_3}{M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3} \cdot g.$$

Ezt visszahelyettesítve megkapjuk a keresett gyorsulásokat:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{M_2 M_3}{M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3} \cdot g, \quad a_2 = \frac{M_1 M_3}{M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3} \cdot g, \\ a_3 &= \left(1 - \frac{M_1 M_2}{M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3} \right) \cdot g. \end{aligned}$$

Az M_1 és M_2 tömegű testek egymáshoz viszonyított gyorsulása $a_1 + a_2$. Az indulástól számított s út megtételéhez szükséges t időt könnyen megkaphatjuk:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2s}{a_1 + a_2}} = \sqrt{\frac{2s(M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3)}{g \cdot (M_2 M_3 + M_1 M_3)}} = \\ &= \sqrt{\frac{2s}{g} \cdot \frac{M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3}{M_3(M_2 + M_1)}}. \end{aligned}$$

Ha a lelógó kötélrész rövid, akkor a csiga mozgása következtében ez a kötélrész nem marad függőleges. Ekkor az M_3 tömegű test mozgása bonyolult görbe pályán történik, ahol a fellépő gyorsulások a hajlásszögtől és a sebességtől is függenek (centripetális erő görbevonalú mozgásnál!). Ezért a fenti megfontolások és eredmények csak hosszú kötel esetén érvényesek.

A feladat súrlódásos általánosítása azonos elvek alapján történhet, csak az az eset érdekes, ha az összes súrlódó erőt figyelembe vesszük.

Legyen az M_1 és M_2 tömegű testek közti súrlódási együttható μ_1 , az M_2 tömegű test és az asztallap közti súrlódás együtthatója μ_2 .

Ekkor a három test mozgásegyenlete:

$$\begin{aligned}M_1 a_1 &= P - \mu_1 M_1 g, \\M_2 a_2 &= P - \mu_1 M_1 g - \mu_2 [(M_1 + M_2)g + P], \\M_3 a_3 &= M_3 g - P,\end{aligned}$$

ahol figyelembe kellett venni az M_2 tömegű testre a felső lapján fellépő M_1 -től származó súrlódó erőt, az asztallap és M_2 között fellépő súrlódó erőt, amelyet az M_2 tömeg, M_1 tömeg és az M_3 tömegtől származó $P = M_3(g - a)$ erők határoznak meg.

Végül a negyedik egyenlet továbbra is érvényes:

$$a_1 + a_2 = a_3.$$

Az egyenletek megoldása:

$$\frac{P - \mu_1 M_1 g}{M_1} + \frac{P - \mu_1 M_1 g - \mu_2 [(M_1 + M_2)g + P]}{M_2} = \frac{M_3 g - P}{M_3},$$

ahonnan

$$\begin{aligned}P &= \frac{M_1 M_2 M_3}{M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_1 M_3 (1 - \mu_2)} \left[1 + \frac{(\mu_1 + \mu_2)(M_1 + M_2)}{M_2} \right] \cdot g, \\a_1 &= \left\{ \frac{M_2 M_3}{M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_1 M_3 (1 - \mu_2)} \left[1 + \frac{(\mu_1 + \mu_2)(M_1 + M_2)}{M_2} \right] - \mu_1 \right\} \cdot g, \\a_2 &= \left\{ \frac{M_1 M_3}{M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_1 M_3 (1 - \mu_2)} \left[1 + \frac{(\mu_1 + \mu_2)(M_1 + M_2)}{M_2} \right] (1 - \mu_2) - \right. \\&\quad \left. - \left[\mu_2 + \frac{M_1}{M_2} (\mu_1 + \mu_2) \right] \right\} \cdot g, \\a_3 &= \left\{ 1 - \frac{M_1 M_2}{M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_1 M_3 (1 - \mu_2)} \left[1 + \frac{(\mu_1 + \mu_2)(M_1 + M_2)}{M_2} \right] \right\} \cdot g.\end{aligned}$$

Az indulástól számítva az M_1 tömegű testnek az M_2 -n mért s út megtételéhez szükséges ideje:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g\{XY \cdot [M_2 + M_1(1 - \mu_2)] - (\mu_1 + \mu_2)(1 + M_1/M_2)\}}},$$

ahol

$$X = \frac{M_3}{M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_1 M_3 (1 - \mu_2)}, \quad Y = 1 + \frac{(\mu_1 + \mu_2)(M_1 + M_2)}{M_2}$$

Eddig minden további nélkül feltettük, hogy a testek mozognak. Ez nem magától értetődő, hiszen ha az adott tömegek esetén a súrlódási együttható nagy, akkor nem jön létre mozgás. Egyszerűség kedvéért legyen $\mu_1 = \mu_2$. Mivel

$$P_{s1} = \mu_1 M_1 g, \quad \text{és} \quad P_{s2} = \mu_2 [(M_1 + M_2)g + P]$$

ezért $P_{s1} < P_{s2}$, és mozgás esetén $M_3 g > P$ kell, hogy teljesüljön. (Gyorsulás esetén az egyenlőség érvényes.)

Ha $M_3 g = P$, akkor M_3 és M_1 is egyenletesen mozog (miután meglöktük), M_2 pedig nyugalomban van. Ekkor $M_3 g = P = P_{s1}$.

Ha $M_3 g > P$, akkor M_1 is és M_3 is gyorsulva mozog, ebből következik, hogy $P > P_{s1}$. De igaz az is, hogy ha $M_3 g > P_{s1}$, akkor $M_3 g > P > P_{s1}$. Ahhoz, hogy M_3 és M_1 gyorsulva mozogjon, elég az, hogy $M_3 g > P_{s1}$ legyen, amiből a súrlódási együtthatóra $\mu_1 < \frac{M_3}{M_1}$ kikötés adódik. Hogy M_2 is mozogjon, kell, hogy

$$P_{s1} + P_{s2} < P \quad \text{igaz legyen.}$$

Egyenletes mozgáshoz $\mu_1 M_1 g + \mu_2 [(M_1 + M_2)g + P] = P$ szükséges, ebből $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ esetben

$$\mu = \frac{P}{2M_1 g + M_2 g + P}.$$

Ahhoz, hogy M_2 gyorsuljon, kell, hogy

$$\mu < \frac{P}{2M_1 g + M_2 g + P} \quad \text{teljesüljön.}$$

Megjegyzés: A feladat megoldható energiatétellel, ill. munkatétellel. Érvényes továbbá a vízszintes irányokra vonatkoztatva a mozgásmennyiség megmaradás tétele súrlódásmentes esetben (a függőleges sebességek vízszintes vetülete nulla). Figyeljük meg ellenőrzésként, hogy a súrlódásos megoldás $\mu_1 = \mu_2 = 0$ helyettesítéssel az első kérdésre adott válaszokat adja.

Holics László