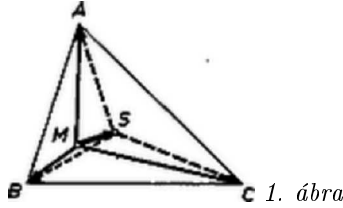


I. megoldás. A feladatban szereplő $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ erőket a vektorösszegezés szabályai szerint felbonthatjuk a következőképpen (1. ábra):



$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} &= \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SA}, \\ \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SB}, \\ \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC}.\end{aligned}$$

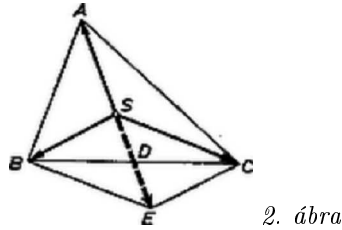
A három egyenletet összeadva:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}.$$

A feladat azt bizonyítani, hogy

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MS}.$$

Ha bizonyítani tudjuk, hogy $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 0$, akkor állításunk igaz. Parallelogramma módszerrel megszerkesztve az $\overrightarrow{SB}$ és $\overrightarrow{SC}$ erők eredőjét (2. ábra), $\overrightarrow{SE}$ erőt kapjuk. Mivel a parallelogramma átlói felezik egymást, ezért a D pont felezőpontja mind az $\overrightarrow{SE}$, mind a $\overrightarrow{BC}$ szakasznak.



$\overrightarrow{SE}$ tehát egy egyenesbe esik $\overrightarrow{SA}$ -val, mert az AD egyenes a BC oldalhoz tartozó súlyvonal. A súlypont 2 : 1 arányban osztja a súlyvonalat, tehát

$$\overrightarrow{SA} = -2 \overrightarrow{SD} = -\overrightarrow{SE} = -(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$$

Rendezve

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 0,$$

így

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \overrightarrow{MS}.$$

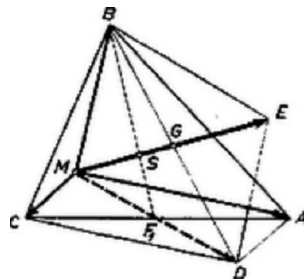
Sólyom Irén (Bp., Veres Pálné gimn. II. o. t.)

Megjegyzés: A bizonyításból látható, hogy M -nek nem kell az ABC_{Δ} síkjában lennie.

Treer Ferenc (Bp., Piarista gimn. II. o. t.)

II. megoldás. A parallelogramma tétel szerint összegezve (3. ábra):

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}, \quad \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{ME}.$$



3. ábra

Az ABC_{Δ} CA oldala és az MD szakasz felezik egymást, mert az $AMCD$ paralelogramma átlói. (A metszéspont F_1 .)

D és B pontokat összekötve kapjuk az MDB háromszöget. A BF_1 szakasz súlyvonala ABC_{Δ} -nek és MDB_{Δ} -nek egyaránt, mert

$$CF_1 = F_1A \quad \text{és} \quad MF_1 = F_1D.$$

Az ME és BD metszéspontját G -vel jelölve látható, hogy MG is súlyvonala MDB_{Δ} -nek, mert $BG = GD$.

MG és BF_1 metszéspontja (S) tehát súlypontja MDB_{Δ} -nek, és mivel a BF_1 súlyvonal az ABC_{Δ} -ben is, és S BF_1 -et $2 : 1$ arányban osztja, ezért S ABC_{Δ} -nek is súlypontja. Ezért ME , az MG meghosszabbítása átmegy az ABC_{Δ} S súlypontján.

Látható, hogy $\overrightarrow{ME}$ eredő háromszorosa az $\overrightarrow{MS}$ vektornak.

Lóczy István (Győr, Mayer L. gimn. II. o. t.)