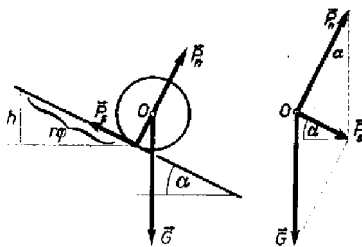


I. megoldás. A következő tényeket használjuk fel.



a) Homogén golyó középpontján átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $I = 2 mr^2/5$, ahol m a golyó tömege, r a sugara.

b) Bármely rendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rá ható összes erők (vektori) összege a tömegközéppontra mint a rendszer össztömegével egyenlő tömegű tömegpontra hatna (tömegközéppont mozgásának tétele).

c) Merev test mozgása egy kiszemelt pontja haladó mozgásából, és e pont körüli elfordulásból tehető össze. Ha ez a pont a tömegközéppont, akkor az e körüli forgás olyan, mintha rögzített tengely esetén hoznák létre a testre ható erők: A tömegközéppont esetében tehát a haladó és forgó mozgást leíró egyenletek szétválnak, függetlenek egymástól.

Jelen esetben a golyóra három erő hat: a G nehézségi erő, a P_n nyomóerő, amely nem engedi behatolni a felületbe, és a P_s súrlódási erő, amely nem engedi csúszni, hanem gördülésre kényszeríti (l. az ábrát). A három erő (vektori) összege csak lejtőirányú lehet, hiszen a golyó O középpontjának általa előidézett mozgása a lejtő mentén történik. Mivel P_s maga is lejtő-irányú, kell, hogy $G + P_n = P$ is ilyen legyen. Így az ábra szerint $P = G \sin \alpha$, illetve $P_n = G \cos \alpha$. A golyó középpontjának a gyorsulására tehát:

$$(1) \quad ma = P - P_s.$$

Másrészt az O körüli forgás szöggyorsulása (mivel csak P_s -nek van forgatónyomatéka O -ra nézve):

$$(2) \quad \beta = P_s r / I, \quad \text{ahonnan} \quad P_s = \beta I / r.$$

Ezt (1)-be helyettesítve, és felhasználva, hogy ha nincs csúszás $r\beta = a$:

$$ma = m(r\beta) = P - \beta I / r,$$

amiből β -t kifejezve:

$$\beta = \frac{P}{mr + I/r} = \frac{Pr}{mr^2 + I} = \frac{rmg \sin \alpha}{2mr^2/5 + mr^2} = g \frac{r \sin \alpha}{7r^2/5} = \frac{5g \sin \alpha}{7r},$$

ami most $5 \cdot 981 \cdot 0,422 / 7 \cdot 10 = 29,5 \text{ sec}^{-2}$.

A golyó nem csúszik, ha $\mu P_n \geq P_s$ (μ a súrlódási együttható), tehát (2) felhasználásával:

$$\begin{aligned} \mu &\geq \frac{P_s}{P_n} = \frac{\beta I}{r P_n} = \frac{PrI}{r P_n (mr^2 + I)} = \frac{mg \sin \alpha}{mg \cos \alpha (mr^2/I + 1)} = \\ &= \frac{\text{tg } \alpha}{1 + mr^2/I} = \frac{\text{tg } \alpha}{1 + \frac{mr^2}{2mr^2/5}} = \frac{2 \text{tg } \alpha}{7}, \quad \text{a mi esetünkben} \\ &2 \cdot 0,468 / 7 = 0,133. \end{aligned}$$

Ormai Lóránt (Pannonhalma, Bencés g. III. o. t.)

II. megoldás. Most azt használjuk fel, hogy merev test mozgási energiája $E_m = mv^2/2 + I\omega^2/2$, ahol m a tömeg, v a tömegközéppont sebessége, I a tömegközépponton átmenő (pillanatnyi) forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka, ω pedig az e körüli forgás szögsebessége.

Jelen esetben álló helyzetből indulva, h függőleges süllyedés után az energiamegmaradás tétele szerint:

$$(3) \quad mgh = mv^2/2 + I\omega^2/2.$$

Mivel most $v = \omega r$ (kerületi- és szögsebesség), továbbá, ha a megtett fordulat φ szög ($\varphi \geq 2\pi$ is lehet), akkor $h = r\varphi \sin \alpha$ (ahol $r\varphi$ a lejtő mentén megtett út: l. az ábrát), és

$$E_m = m(\omega r)^2/2 + I\omega^2/2 = \omega^2(mr^2 + I)/2.$$

Ezeket (3)-ba írva, és ebből ω -t kifejezve:

$$\begin{aligned} mgr \varphi \sin \alpha &= \omega^2(mr^2 + I)/2, \quad \text{azaz} \\ \omega &= \sqrt{2 \frac{mgr \sin \alpha}{mr^2 + I}} \varphi. \end{aligned}$$

Ez minden φ -re igaz: ω a szögsebesség φ fordulat után. De ez az összefüggés a $v = \sqrt{2as}$ egyenlőség megfelelője (kezdősebesség nem volt!), ahol a konstans a most a szöggyorsulás:

$$\beta = \frac{mgr \sin \alpha}{mr^2 + I} = \frac{5g \sin \alpha}{7}$$

A megoldás további része lényegében az előzővel azonos.

Sándor Zoltán (Ráckeve, Ady E. g. III. o. t.) dolgozata alapján