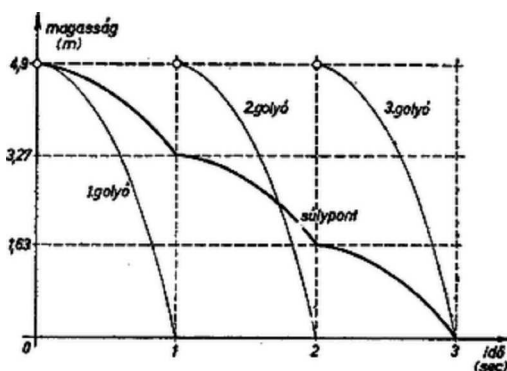
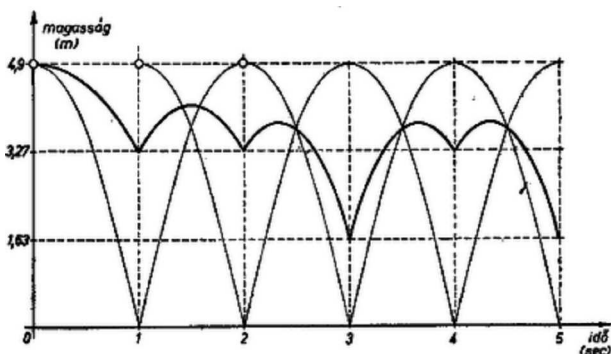


Fel fogjuk használni azt a tényt, hogy három egyenlő tömegű tömegpont egy egyenes mentén való mozgása esetén közös súlypontjuk sebessége és gyorsulása az egyes tömegpontok megfelelő előjellel ellátott sebességeinek ill. gyorsulásainak számtani közepe (1. a megjegyzést).



Vegyük észre, hogy az esés ideje éppen 1 sec. ($gt^2/2 = 4,9$ m, innen $t^2 = 2 \cdot 4,9 \text{ m}/g = 1 \text{ sec}^2$.)

Grafikusan az első golyó útját az idő függvényében parabola ábrázolja: $s = gt^2/2$. A súlypont gyorsulása csak $(g + 0 + 0)/3 = g/3$, a magasságot tehát egy 1 : 3 arányban lapított parabola ábrázolja. Végpontja $4,9 \cdot 2/3 = 3,27$ m magasan lesz. Ezután csak a második golyó végez szabadesést, azért ismét $g/3$ lesz a súlypont gyorsulása, így az előbbi út-idő grafikon valósul meg, a $h = 3,27$ m pontból indulva $4,9/3 = 1,63$ m-ig. Majd ez ismétlődik még egyszer. (Kezdősebesség egyik szakasz elején sincs!)



Rugalmas ütközés esetén az első sec alatt ugyanaz történik, mint előbb. Ezután az első golyó $v_0 = g \cdot 1$ sec sebességgel visszapattan, és a második is esni kezd. A két golyó gyorsulása egyaránt g (lefelé). A súlypont felfelé irányuló $(v_0 + 0 + 0)/3 = v_0/3$ kezdősebességgel rendelkezik, gyorsulása lefelé $(g + g + 0)/3 = 2g/3$ lesz. Ez tehát lényegében egy függőleges hajítás, az emelkedés idejére (1. pl. a 299. feladat megoldását) $v_0/3 = 2g \cdot t_0/3$ teljesül, így $t_0 = 0,5$ sec, az emelkedési magasság: $(2g/3) \cdot t^2/2 = g/12 \text{ m} = 0,85$ méter. Ezért a 2 sec végén a súlypont visszaérkezik a 3,27 m magasságba, míg közben a $t = 1,5$ sec időpontban $3,27 + 0,85 = 4,12$ m magasságig emelkedett. Ezután a második golyó ismét v_0 sebességgel visszapattan, az első és a harmadik együtt indul kezdősebesség nélkül fentről. Most mindhárom golyó esik, tehát lefelé gyorsul. Így a tömegközéppont kezdősebessége ismét $(0 + v_0 + 0) = v_0/3$ és felfelé irányul, gyorsulása $(g + g + g)/3 = g$ lefelé: ismét függőleges hajítás. Az emelkedés ideje most $\frac{v_0/3}{g} = \frac{g \cdot 1 \text{ sec}/3}{g} = 1/3$ sec, a

magasság $g/2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0,58$ m, tehát a súlypont $3,27 + 0,54 = 3,81$ m magasságig emelkedik, majd innen $2/3$ sec-ig, azaz $g/2 \cdot (2/3)^2 = 2,18$ métert szabadon esik, tehát a 3. sec végén $3,81 - 2,18 = 1,63$ m magasan lesz, ami természetesen megfelel a golyók helyzetének. A következő sec-ban a golyók mozgása ellentétes irányban ugyanaz lesz, mint most volt, így a súlypont is ugyanilyen módon visszajut a 3,27 m-es kiindulási helyzetbe; majd az előbbi ismétlődik.

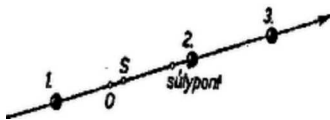
Dobozy Ottó (Bp., Apáczai Cs. J. gyak. isk. VII. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés: Bebizonyítjuk a kiindulásul felhasznált tényt. Vegyünk fel egy egyenest 0 kezdőponttal, és jelöljük ki rajta a pozitív irányt (3. ábra). Helyezkedjenek el az egyenlő tömegű tömegpontok ezen az egyenesen 0-tól x_1 , x_2 , ill. x_3 előjeles távolságra. Ekkor a súlypontjukat pl. így határozhatjuk meg: az 1. és 2. tömegpont súlypontja a köztük levő szakasz S felezőpontja, tehát $(x_1 + x_2)/2$. Ezután ebben a pontban gondoljuk egyesítve az 1. és 2. testeket, ekkor ezek és a 3. test súlypontja az őket összekötő szakasz S -hez közelebbi harmadolópontja, hiszen S -ben kétszeres tömeg „van”. Ezt a pontot pl. úgy kapjuk meg, hogy S -től felmérjük az S -től a 3. pontig terjedő szakasz $1/3$ részét:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{1}{3} \left(x_3 - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) = \frac{x_3}{3} + \frac{2x_1 + x_2}{3 \cdot 2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Mozduljon el egy Δt idő alatt a három tömegpont előjel szerint Δx_1 , Δx_2 , ill. Δx_3 szakasszal. Ekkor a súlypont elmozdulása

$$x = \frac{(x_1 + \Delta x_1) + (x_2 + \Delta x_2) + (x_3 + \Delta x_3)}{3} - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3)/3.$$



Így a súlypont átlagsebessége

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \frac{\Delta x_2}{\Delta t} + \frac{\Delta x_3}{\Delta t} \right) / 3.$$

Mivel ez akármilyen kis Δt -re igaz, ezért hasonló összefüggés áll fenn a pillanatnyi sebességek közt is. Ugyanígy látható be az állítás a gyorsulásra, ill. általában akárhány tömegpontra.