Bizonyítanunk kell, hogy a T menetidőre fennáll a következő:

$$T \geq \left[\frac{2s(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right]^{1/2}.$$

Tegyük fel, hogy a vonat T_1 ideig a egyenletes gyorsulással mozog, majd b abszolút értékű egyenletes lassulással éppen az s út végén áll meg ($T_1 + T_2 = T$).
Ez esetben igaz, hogy $\dfrac{aT_1^2}{2} + \dfrac{bT_2^2}{2} = s$,
illetve $aT_1^2 + bT_2^2 = 2s$. Szorzunk $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$ -vel:

$$\frac{aT_1^2}{b} + T_1^2 + T_2^2 + \frac{bT_2^2}{a} = 2s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

A maximális sebesség értékére érvényes kifejezést felhasználva ($v = aT_1 = bT_2$) kapjuk:

$$T_1T_2 + T_1^2 + T_2^2 + T_1T_2 = 2s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

$$(T_1 + T_2)^2 = T^2 = 2s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

$$T = \left[2s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right]^{1/2}.$$

Ez akkor a legkisebb, ha a és b maximális α ill. β értékeiket veszik fel.

$T_{\min} = \left[\dfrac{2s(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right]^{1/2}$, ha a vonat a gyorsulással addig gyorsul, amikor a maximális lassulással el kell kezdenie a fékezést, hogy az s út végén még megállhasson.

Papp László (Jászberény, Lehel g. IV. o. t.),
Kiss Gábor (Debrecen, Kossuth L. g. IV. o. t.)
megoldásai alapján.

Megjegyzések: 1. Legyen a mozgás folyamán olyan pályaszakasz, ahol a vonat egyenletesen mozog. Az idő és útszakaszok rendre T_1 (gyorsulás), T_2 (egyenletes mozgás), T_3 (lassulás) ill. s_1, s_2, s_3; ($T_1 + T_2 + T_3 = T$, $s_1 + s_2 + s_3 = s$). Az előbbiek alapján a gyorsuló és lassuló mozgásra

(I.) $$T_1^2 + 2T_1T_3 + T_3^2 = \frac{2(s_1+s_3)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$

Az egyenletes mozgás idejére

(II.) $$T_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{s_2}{\alpha T_1}, \quad \text{innen} \quad 2T_1T_2 = \frac{2s_2}{\alpha}$$

(III.) $$T_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{2}{\beta T_3}, \quad \text{innen} \quad 2T_2T_3 = \frac{2s_2}{\beta}.$$

A három egyenletet összeadva és mindkét oldalhoz T_2^2-et hozzáadva

$$T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + 2T_1T_2 + 2T_1T_3 + 2T_2T_3 = \frac{2(s_1+s_2+s_3)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} + T_2^2,$$

$$(T_1 + T_2 + T_3)^2 = T^2 = \frac{2s(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} + T_2^2,$$

$$T = \left[\frac{2s(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} + T_2^2\right]^{1/2} > \left[\frac{2s(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right]^{1/2}, \quad \text{mivel} \quad T_2 \neq 0.$$

A menetidőre valóban fennáll, hogy

$$T \geq \left[\frac{2s(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right]^{1/2}.$$

Bizonyítanunk kell, hogy a T menetidőre fennáll a következő:

$$T \geq \left[\frac{2s(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right]^{1/2}.$$

Tegyük fel, hogy a vonat T_1 ideig a egyenletes gyorsulással mozog, majd b abszolút értékű egyenletes lassulással éppen az s út végén áll meg ($T_1+T_2=T$).
Ez esetben igaz, hogy $\frac{aT_1^2}{2}+\frac{bT_2^2}{2}=s$,
illetve $aT_1^2+bT_2^2=2s$. Szorzunk $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ -vel:

$$\frac{aT_1^2}{b}+T_1^2+T_2^2+\frac{bT_2^2}{a}=2s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

A maximális sebesség értékére érvényes kifejezést felhasználva ($v=aT_1=bT_2$) kapjuk:

$$T_1T_2+T_1^2+T_2^2+T_1T_2=2s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

$$(T_1+T_2)^2=T^2=2s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

$$T=\left[2s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^{1/2}.$$

Ez akkor a legkisebb, ha a és b maximális α ill. β értékeiket veszik fel.

$T_{\min}=\left[\frac{2s(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right]^{1/2}$, ha a vonat a gyorsulással addig gyorsul, amikor a maximális lassulással el kell kezdenie a fékezést, hogy az s út végén még megállhasson.

Papp László (Jászberény, Lehel g. IV. o. t.),
Kiss Gábor (Debrecen, Kossuth L. g. IV. o. t.)
megoldásai alapján.

Megjegyzések: 1. Legyen a mozgás folyamán olyan pályaszakasz, ahol a vonat egyenletesen mozog. Az idő és útszakaszok rendre T_1 (gyorsulás), T_2 (egyenletes mozgás), T_3 (lassulás) ill. s_1, s_2, s_3; ($T_1+T_2+T_3=T$, $s_1+s_2+s_3=s$). Az előbbiek alapján a gyorsuló és lassuló mozgásra

(I.)
$$T_1^2+2T_1T_3+T_3^2=\frac{2(s_1+s_3)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}.$$

Az egyenletes mozgás idejére

(II.)
$$T_2=\frac{s_2}{v}=\frac{s_2}{\alpha T_1},\quad \text{innen}\quad 2T_1T_2=\frac{2s_2}{\alpha}.$$

(III.)
$$T_2=\frac{s_2}{v}=\frac{2}{\beta T_3},\quad \text{innen}\quad 2T_2T_3=\frac{2s_2}{\beta}.$$

A három egyenletet összeadva és mindkét oldalhoz T_2^2-et hozzáadva

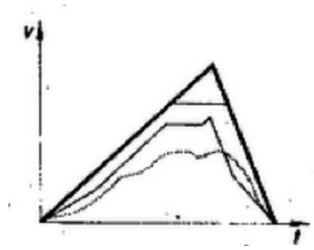
$$T_1^2+T_2^2+T_3^2+2T_1T_2+2T_1T_3+2T_2T_3=\frac{2(s_1+s_2+s_3)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+T_2^2,$$

$$(T_1+T_2+T_3)^2=T^2=\frac{2s(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+T_2^2,$$

$$T=\left[\frac{2s(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+T_2^2\right]^{1/2}>\left[\frac{2s(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right]^{1/2},\quad \text{mivel}\quad T_2\neq 0.$$

A menetidőre valóban fennáll, hogy

$$T\geq\left[\frac{2s(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right]^{1/2}.$$



2. A sebesség-idő grafikonból szemléletesen is látszik, hogy az a vonat, amely egyes szakaszokon egyenletes sebességgel, vagy változó (de α ill. β-nál kisebb) gyorsulással halad, csak kevesebb utat tehet meg (tehát adott út megtétele több időbe kerül) mint a fenti esetben. A megtett utat a sebesség-idő grafikon alatti terület adja.

Mészáros György (Bp., Piarista g. III. o. t.)