

A sorozat képzési szabálya alapján világos, hogy ha nemcsak  $a_0$ , hanem még  $a_1$  értékét is megadjuk, akkor már a sorozat tagjai egyértelműen meg vannak határozva. Nem adhatjuk meg azonban tetszés szerint  $a_1$  értékét, hiszen  $a_1$  megválasztásával biztosítanunk kell, hogy a sorozat tagjai pozitívak legyenek. Azt kell megmutatnunk tehát, hogy ez a követelmény  $a_1$ -et egyértelműen meghatározza.

Jelöljük  $a_1$ -et  $x$ -szel, és nézzük meg  $n$  néhány értékére, hogy milyen feltételt jelent  $x$ -re az  $a_n > 0$  alapkövetelmény:

$$a_1 = x, \quad \text{tehát} \quad x > 0;$$

$$a_2 = -x + 1, \quad \text{tehát} \quad x < 1;$$

$$a_3 = 2x - 1, \quad \text{tehát} \quad x > \frac{1}{2};$$

$$a_4 = -3x + 2, \quad \text{tehát} \quad x < \frac{2}{3};$$

$$a_5 = 5x - 3, \quad \text{tehát} \quad x > \frac{3}{5};$$

$$a_6 = -8x + 5, \quad \text{tehát} \quad x < \frac{5}{8}.$$

Közben megfigyelhettük, hogy  $x$  együtthatóinak az előjele változik, és ugyanezek az együtthatók lépnek fel a következő tag konstansaként, vagyis

$$(1) \quad a_n = (-1)^{n-1}(\lambda_n x - \lambda_{n-1}),$$

ahol  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 2$ ,  $\lambda_4 = 3$ ,  $\lambda_6 = 5$ .

Ezekre a számokra teljesül a

$$(2) \quad \lambda_{n+1} = \lambda_{n-1} + \lambda_n$$

összefüggés, állítsuk elő ennek alapján az egész  $\lambda_n$  sorozatot. Megmutatjuk, hogy ha a  $\lambda_n$  sorozatot a  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = 1$  kezdőértékek és a (2) összefüggés alapján határozzuk meg, akkor az  $a_n$  sorozat minden tagjára teljesül (1). Már láttuk, hogy (1) igaz  $n = 1, 2$  mellett. Tegyük fel, hogy valamilyen  $N \geq 2$  szám mellett már beláttuk, hogy (1) teljesül minden  $n \leq N$  indexre. Akkor ebből és a képzési szabályból következik, hogy

$$\begin{aligned} a_{N+1} = a_{N-1} - a_N &= (-1)^{N-2}(\lambda_{N-1}x - \lambda_{N-2}) - (-1)^{N-1}(\lambda_N x - \lambda_{N-1}) = \\ &= (-1)^N(\lambda_{N-1} + \lambda_N)x - (\lambda_{N-2} + \lambda_{N-1}), \end{aligned}$$

ami (2) alapján valóban (1) alakú.

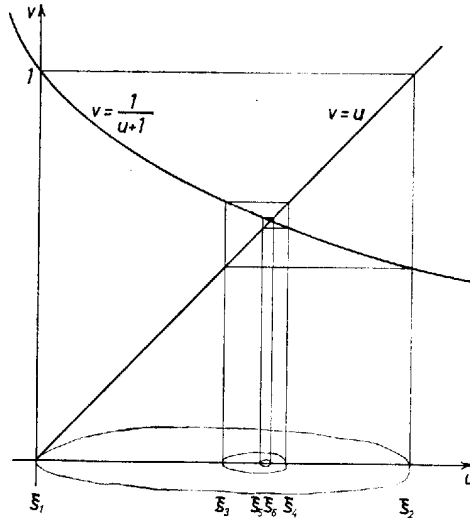
Mivel  $\lambda_1 > 0$ , (2)-ből következik, hogy  $n > 0$  mellett  $\lambda_n > 0$ . Így az  $a_{2k-1} > 0$  feltételből az következik, hogy  $x > \lambda_{2k-2}/\lambda_{2k-1}$ , az  $a_{2k} > 0$  feltételből pedig az, hogy  $x < \lambda_{2k-1}/\lambda_{2k}$ . Jelöljük a  $\lambda_{n-1}/\lambda_n$  hányadost  $\xi_n$ -nel, akkor

$$(3) \quad \xi_{2k-1} < x < \xi_{2k}; \quad k = 1, 2, \dots$$

Azt kell megmutatnunk, hogy (3) egyértelműen meghatározza  $x$  értékét. (2) szerint

$$\xi_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1} + \lambda_n} = \frac{1}{\xi_n + 1}.$$

A továbbiakban elég ennyit tudnunk a  $\xi_n$  sorozatról, és azt, hogy  $\xi_1 = 0$ , hiszen ezzel a  $\xi_n$  sorozat már egyértelműen meg van határozva.



A  $k = 1, 2, 3$  számokra (3) rendre a  $(0, 1)$ ,  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ ,  $\left(\frac{3}{5}, \frac{5}{8}\right)$  nyílt intervallumokat engedi meg  $x$  szóbjöhető értékeire. Ezek az intervallumok tartalmazzák egymást, szokásos kifejezéssel élve: egymásba vannak skatulyázva. Akárhányat sorolunk is fel közülük, a legutolsó mindig a legrövidebb, benne van mindegyik korábbiiban, elég tehát  $x$ -ről azt megkövetelni, hogy abban legyen benne. (Ezeket az intervallumokat és a  $\xi_n$  sorozat képzési szabályát szemlélteti az ábra.)

Jelöljük az  $u = \frac{1}{u+1}$  egyenlet pozitív gyökét  $\xi$ -vel:  $\xi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ . Mivel

$$0 = \xi_1 < \xi_3 < \xi,$$

és az  $f(u) = \frac{1}{u+1}$  függvény  $u \geq 0$  mellett monoton fogy,

$$f(\xi_1) > f(\xi_3) > f(\xi),$$

azaz

$$\xi < \xi_4 < \xi_2.$$

Hasonlóan a

$$0 \leq \xi_{2k-1} < \xi_{2k+1} < \xi$$

egyenlőtlenségből a

$$\xi < \xi_{2k+2} < \xi_{2k}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ebből pedig a

$$0 \leq \xi_{2k+1} < \xi_{2k+3} < \xi$$

egyenlőtlenséget. Tehát a  $\xi_n$  sorozat páratlan indexű tagjaiból álló részsorozata monoton nő, és a tagok kisebbek  $\xi$ -nél, a páros indexű tagok részsorozata pedig monoton fogy, és a tagok nagyobbak  $\xi$ -nél. Emiatt (3) teljesül az  $x = \xi$  számra, azt kell még megmutatnunk, hogy másra nem teljesülhet. Tudjuk, hogy

$$\delta_k = \xi_{2k} - \xi_{2k-1}$$

sorozat monoton fogy és tagjai pozitívak. Megmutatjuk, hogy ez a sorozat 0-hoz tart. Ebből már következik állításunk, hiszen ha volna olyan  $x \neq \xi$  szám, amelyre teljesülne (3), akkor a  $\delta_k$  sorozat minden tagja nagyobb volna a pozitív  $|\xi - x|$ -nél, ami  $\delta_k \rightarrow 0$  miatt nem lehet. Mivel

$$\delta_k = \xi_{2k} - \xi_{2k-1} = \frac{\lambda_{2k-1}}{\lambda_{2k}} - \frac{\lambda_{2k-2}}{\lambda_{2k-1}} = \frac{\lambda_{2k-1}^2 - \lambda_{2k}\lambda_{2k-2}}{\lambda_{2k}\lambda_{2k-1}},$$

készen is vagyunk, ha belátjuk, hogy itt a számláló értéke mindig 1, hiszen a nevező a nyilvánvaló  $\lambda_n \geq n$  egyenlőtlenség miatt tart végtelenbe. A  $\Delta_n = \lambda_n^2 - \lambda_{n-1}\lambda_{n+1}$  sorozat tagjaira

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \lambda_{n+1}^2 - \lambda_n\lambda_{n+2} = \lambda_{n+1}^2 - \lambda_n(\lambda_n + \lambda_{n+1}) = \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) - \lambda_n^2 = \\ &= \lambda_{n+1}\lambda_{n-1} - \lambda_n^2 = -\Delta_n \end{aligned}$$

teljesül, tehát  $\Delta_{n+2} = \Delta_n$ , így  $\Delta_1 = 1$  miatt a sorozat minden páratlan indexű tagja 1-gyel egyenlő. Mivel  $\delta_k$  fenti alakjában éppen ezek állnak a számlálóban, a bizonyítást ezzel befejeztük.

*Megjegyzés.* Általában ha egy  $\xi_n$  sorozatról tudjuk, hogy a páratlan indexű tagjainak részsorozata monoton nő, a páros indexűeké pedig fogy, és a  $\delta_k = \xi_{2k} - \xi_{2k-1}$  különbség 0-hoz tart, akkor a sorozat konvergens. A megoldók többsége erre az állításra hivatkozva bizonyította, hogy a (3) feltételnek egy és csakis egy megoldása van. Ebből a „csak egy” rész a  $\delta_k \rightarrow 0$  feltétel következménye, mint azt megoldásunkban is láttuk, a „legalább egy” rész pedig szervesen kapcsolódik a valós szám fogalmához. Tekintve, hogy az analízis alapfogalmainak jelenleg használt középiskolai bevezetése nagymértékben támaszkodik a szemléletre, ez a tétel nem szerepel a tananyagban, ezért bizonyítottuk a (3) feltételnek eleget tevő  $x$  szám létezését e tétel felhasználása nélkül (ami különben nem került különösebb fáradságba, hiszen ez az  $x$  az esetünkben explicit megadható volt).