Legyen még az AD és PB húrok metszéspontja G – nyilvánvalóan E és A között –, így a GPD és GAB derékszögű háromszögek hasonlóságából, majd mivel az utóbbi ($AB = AD$ és két szögük egyenlősége alapján) 90°-os elfordítás után lefedi az FAD derékszögű háromszöget:

$$\frac{PG}{PD} = \frac{AG}{AB} = \frac{AF}{AB}. \tag{1}$$

Másrészt, mivel C felezi a P-t nem tartalmazó BD félkört, azért a PC – más jelöléssel PE – egyenes felezi a GPD szöget, tehát a szögfelező tételét, a GPD háromszögre alkalmazva

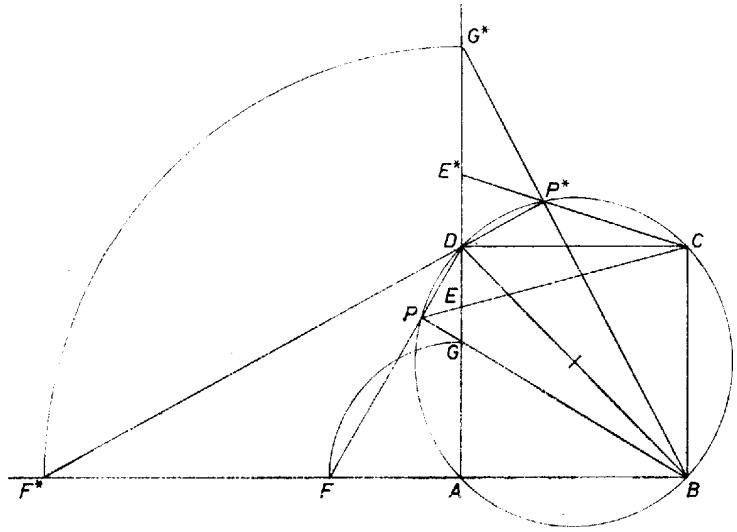
$$\frac{PG}{PD} = \frac{EG}{ED} = \frac{EA - GA}{AD - AE} = \frac{AE - AF}{AB - AE}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) bal oldalai egyenlők, ezért a jobb oldalakból, alkalmas felcseréléssel

$$\frac{AB - AE}{AB} = \frac{AE - AF}{AF},$$
$$1 - \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{AF} - 1,$$

ahonnan – a tört kifejezéseket a jobb oldalra gyűjtve, végül $2 \cdot AE$-vel osztva

$$\frac{1}{AE} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AF}\right).$$



Ez az állításnak olyan alakítása, amit szóban így mondhatunk ki: AE reciproka egyenlő az AB és AF reciprokának számtani közepével. Ennek szokásos kifejezése: AE egyenlő az AB és AF harmonikus közepével.[1]

Neumüller Imre (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., II. o. t.)

Pörneczi Tamás (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ábránkról (visszafelé) leolvasható egy-egy szerkesztő eljárás két különböző szakasz harmonikus közepének szerkesztésére, illetve ennek megfordítására, a szakaszpár hiányzó tagjának szerkesztésére, ha ismert a harmonikus közép és a nagyobbik szakasz. Mindkét esetben a két szakasz nagyobbikának AB szerepét adjuk át, az első esetben a kisebbik szakasz szerepét AF-nek, a második esetben a harmonikus közép szerepét AE-nek. Megszerkesztve a négyzetet és a kört, az első esetben DF kimetszi P-t, majd PC az E-t, a másodikban viszont CE kimetszi P-t és PD az F-et.

2. Az 1. megjegyzéshez kapcsolódva, az AF és AE adatok $AE > AF$ nagyságviszonya mellett nehézkesebb lenne előállítani a kört és a négyzetet. Ez veti fel ötletként: hátha akkor is érvényes az állítás, ha P helyére a rövidebbik CD ív egy belső P^* pontját választjuk. Könnyű belátni, hogy bizonyításunk – lényegtelen módosítások után – ekkor is érvényes. Így az elintézetlenül maradt esetben a harmonikus középnél kisebb, ismert szakasz is megkaphatja AB szerepét; továbbá az első esetben tetszőleges, hogy a szakaszpár melyik tagja kapja AB szerepét.

[1] Lásd az Iskolai függvénytáblázat 241.4 és 242.3 képleteit $n = 2$ mellett, alkalmas alakítás után.